電気通信學會誌 (昭28—2) 別刷

薄板狀水晶振動子の振動*

(特に R_1 板の近接波について)

正員 古賀逸策　正員 福与人八
(東京大学工学部)　(東京[illegible])

電気通信學會誌 (昭28—2)

1. 緒　言

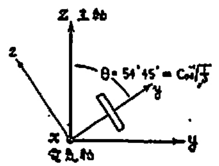
水晶振動子が高周波工学上に應用される事が紹介されて間もなく，薄板狀振動子が登場し，その厚味に逆比例する周波数の振動が非常に利用される様になつたが，一面夫々この振動に近接した周波数の幾つかの振動がある事が認められ，振動子を共振子として使用するにも，発振子として使用するにも，不便が少くなかつた。実用上の見地からは斯様な所謂"近接波"を除き単一の振動だけしかない様に出來ないものであろうかと云う要望が強かつた事は云う迄もなく，これが為種々な技巧を加える試みが提案されたが，何れも大した成功をおさめる事が出來なかつた。

筆者等はこの問題を解決するには，先ず以て所謂近接波がどんな素性のものであるかを究める必要があるとの見解から，種々心を砕いて居たが，最近筆者の一人（福与）が創案した探針法とも云うべき，振動に伴なう歪に起因する電気偏極の分布の観測に成功したのが契機となつて，振動の実態が躍進的に明確になつた。本報告はその要点を現在最もよく実用されて居る振動子である所の R_1 板について報告せんとするものである。周知の通り，この種の問題に関しては既に数人の学者[1][2]が相当詳細に論じて居る所であり，且勿論夫々特色はあるが，何れも未だ全貌を解明し得て居ない憾がある。

2. 薄板狀振動子の厚味振動と輪郭寸法との関係

先ず話の順序として，輪郭の寸法が無限に大きい振動子について既に報告した結果の要点を簡単に述べ，本論に進入つて行きたい。

今振動子 R_1 板の板面への法線方向を y 軸，digonal axis の方向を x 軸にとると（第1図参照），板面の寸法が x 及び z 方向に ∞ である場合には，板の振動は y 方向に往復する平面波に基づく定在波に外ならない。従つて総ての量が x 方向及び z 方向に変化分がないとの条件を運動の方程式に入れると，三種類の平面波が得られるが，この中圧電的に励振し得るもののみをとり，且 $y=0$ 及び $y=y_0$ の両面に於いて歪がないと云う条件を入れると，次の関係を得る。



第 1 図

$$\omega y_0 / \sqrt{\rho / c_{66}} = q\pi \quad (q\ ;\ \text{正整数}) \qquad (1)$$

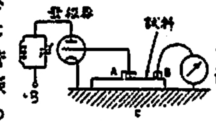
$$u = A\cos(q\pi y / y_0)\varepsilon^{j\omega t} \qquad (2)$$

但し，ω は角周波数，ρ は密度，c_{66} は弾性定数，u は x 方向の変位

以上の結果は，表現の形式こそ多少異なつて居るが既に度々報告した所である（附録Ⅰに於ける c_{66} と c_{66}' との関係参照）

x 方向の寸法及び z 方向の寸法が ∞ であれば上述の振動（圧電的に励振し得る姿態の振動は只1種，励振し得ない姿態の振動がその外に2種）以外の振動は全くあり得ない。然るに実際の振動子**に於いては (1) 式で与えられる周波数に近い振動数の振動が沢山ある。して見ればこれ等の振動は，x 方向の寸法及び z 方向の寸法が有限である事に起因して居る事は疑ない。然しこれ等の振動がどの様な姿態の，又寸法とどんな関係の振動数であるかについては，未だ必ずしも充分釈然たるものがない。

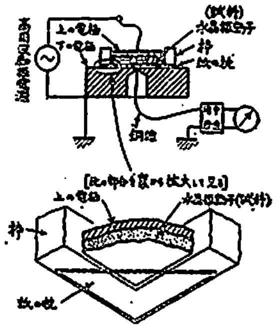
一体振動子の振動姿態は，板面の寸法が有限である為に，振動数及び振動姿態が (1) (2) 両式の示す所のものからどの様に異つたものになるか。そしてそれはどんな方法で探ればよいかと非常に腐心したが，一つの試みとして第2図に示す様に，振動子に配する電極の片方 A を極く小さい面積にして振動子の略中央に置き，真空管による発振回路で発振せしめ，振動子表面の残りの部分に他の電極 B を移動し，これに誘起する電圧を調べて見る事とした。この実験から発展して間もなく筆者の一人（福与）が次の如き配置を創案し，この結果従來全然企図し得なかつた，振動子の内部に於ける歪の分布を観測する事が出來，本問題の研究が飛躍的に進歩した。そこで順序として先ずこの観測方法及び観測の結果につき説明し，その上で理論的考察を進めたい。



第 2 図

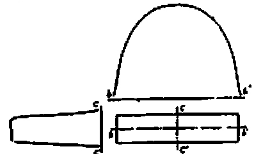
3. 探針法による振動子の偏極分布の観測

筆者の一人（福与）が工夫した方法と云うのは，謂わば第2図に於ける電極 A が電極 B に触れないで，而も事実上振動子の全面を蔽う様にした形式のもので，第3図の如く表面を平面に仕上げた広い電極に小孔を設け，この孔に二重絹巻銅線（直径約0.3mm）を押込み，これを探針として用いる。そしてこの探針に対向する振動子部分を変化するには，振動子の方を移動する事とし，振動子は絶縁物製の枠の四隅に貼つた極く狭い三角形の薄い紙の枕の上に載せ，振動子の上に載せた他方の電極（第2図の C に相当する電極）と一緒に静かに移動させる事とした。この様な配置にした主な理由は，下の電極と振動子とが接触して居ると，振動子に対向する探針の位置を移動する場合に，接触状態が変化して結果が複雑になるのを防ぐ為である。斯様にして探針には，これに対向する極部だけの偏極に該当する電圧が得られる訳である。この電圧を観測するには，真空管で増巾した上検波した。



第 3 図

この様な配置で先ず観測装置の動作を確認する意味で，振動姿態に疑問のない振動についての観測を行つた。即ち矩形 X 板で板面の一辺が充分短く且つ水晶の主軸に平行で，他の辺が充分長いものについて，最も低い周波数の振動即ち板面の長辺の方向の縦振動を観察して見た所，第4図の如く，長辺の方向に略正弦波形，短辺の方向には殆んど一様な偏極の分布になり，予想通りであつた。



(試片寸法 [illegible] 1.11 mm [illegible] 3.65 mm, 16.59 mm)

第 4 図

さて然らば薄板狀振動子の振動に於いてはどんな偏極分布になるかを観察して見た所，後に第8図第10図等で示す様に，振動の姿態が非常に整然として居り，従つてこれを検討する事により，振動姿態と振動数との関連も非常に明瞭になつた。然し本稿ではその経緯を忠実に報告するよりも，寧ろ結局の所達し得た理論的説明と探針法による実験的結果とを対照し乍ら話を進める事としたい。

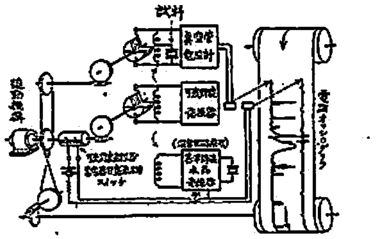
4. 共振周波数の測定

振動子の共振周波数は非常に沢山ある上に，どの程度に顕著なもの迄採り上げて論ずべきかと云う点の判断が中々六ケ敷かつたので，結局次の様な方法によつた。即ち曾て水晶周波計について報告[3]した方法を利用し，第5図に示す様に可変周波発振器で周波数を徐徐に而も連続的に変化し，一方この発振器の周波数に常に同調させた電気振動回路を設け，これに試料たる水晶振動子を適度に結合させて置くと，水晶振動子の共振に伴ない電気振動回路の電圧が降下する。この電圧を真空管電圧計に入れ，その出力を電磁オシログラフで自動的に記録させた。この際共振の起つた周波数

---

*Vibration of Thin Piezoelectric Quartz Plate (Especially on R_1-Cut Rectangular Plate).
〔論文番号 2495〕

**こゝでは勿論充分注意深く仕上げた振動子を対象として居る。仕上げが不充分な為の影響については附録Ⅱに記述した。



第　5　図

を記録紙の上で精密に決定し得る様，別に設けた基準周波水晶発振器を混合管として発用し，その出力をオシログラフの他の振動素子に入れて基準周波数の位置を表示すると共に，可変周波発振器の蓄電器の容量を変化する螺子歯車が一回転する毎に，やはり標識が現われる様にした。附録Iの第16図，第17図はその記録例である（これ等写真記録は印刷が不鮮明になるのを恐れ敷写しした図を掲げる事とした）。云う迄もなく，共振子の振動に伴なう，板面に垂直な方向の電気偶極（の表面積分）が大きい場合程電気振動回路との結合が密であるから，共振の谷が深く且広くなる。従つて斯様な方法で観察した顕著なもの程実際上にも重要視すべきものである。

5. 厚味振動（其の1）

先ず運動の方程式（一般式）

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \text{etc.}$$

を水晶の場合につき第1図に示した座標軸に関し書き直すと，

$$\left.\begin{aligned} L_0u+H_0v+G_0w&=\rho\partial^2 u/\partial t^2\\ H_0u+M_0v+F_0w&=\rho\partial^2 v/\partial t^2\\ G_0u+F_0v+N_0w&=\rho\partial^2 w/\partial t^2\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

但し

$$L_0=c_{11}D_x^2+c_{66}D_y^2+c_{55}D_z^2+2c_{56}D_yD_z$$

$$M_0=c_{66}D_x^2+c_{22}D_y^2+c_{44}D_z^2+2c_{24}D_yD_z$$

$$N_0=c_{55}D_x^2+c_{44}D_y^2+c_{33}D_z^2+2c_{34}D_yD_z$$

$$F_0=c_{56}D_x^2+c_{24}D_y^2+c_{34}D_z^2+(c_{23}+c_{44})D_yD_z$$

$$G_0=(c_{13}+c_{55})D_zD_x+(c_{14}+c_{56})D_xD_y$$

$$H_0=(c_{14}+c_{56})D_zD_x+(c_{12}+c_{66})D_xD_y$$

D_x, D_y, D_z は夫々 x, y, z 方向の偏微分 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ を表す。

前述した様に（第1図参照）y 軸の方向を R_1 板の板面への法線に一致せしめた場合には，附録Iの末尾に示す様に c_{14}, c_{24}, c_{34}, c_{56} の四つの弾性定数は他の定数に比して相当小さい。そこでこれ等を一応無視し又変位 u の y に関する函数形式は z 方向及び x 方向の寸法が∞である時と異ならないと見て差支ない事，及び探針法による x 方向及び z 方向の偶極の分布を参考として，試みに次の如き解を与えて見た。

$$\left.\begin{aligned} u&=A\sin\alpha x\cdot\cos\beta y\cdot\cos\gamma z\cdot\varepsilon^{j\omega t}\\ v&=B\cos\alpha x\cdot\sin\beta y\cdot\cos\gamma z\cdot\varepsilon^{j\omega t}\\ w&=C\cos\alpha x\cdot\cos\beta y\cdot\sin\gamma z\cdot\varepsilon^{j\omega t}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

そして，$x=0\ \&\ x_0$, $y=0\ \&\ y_0$, $Z=0\ \&\ z_0$ の6面が張力を受けないと云う必要条件から，次の関係を得る。

$$\alpha x_0=p\pi,\ \beta y_0=q\pi,\ \gamma z_0=r\pi\qquad(5)$$

但し p, q, r は正整数

又(4)(5)を(3)に入れて A, B, C を消去すると，

$$\begin{vmatrix} L-\omega^2\rho & H & G\\ H & M-\omega^2\rho & F\\ G & F & N-\omega^2\rho\end{vmatrix}=0\qquad(6)$$

但し

$$L=c_{11}\alpha^2+c_{66}\beta^2+c_{55}\gamma^2,\ F=(c_{23}+c_{44})\beta\gamma,$$

$$M=c_{66}\alpha^2+c_{22}\beta^2+c_{44}\gamma^2,\ G=(c_{13}+c_{55})\gamma\alpha,$$

$$N=c_{55}\alpha^2+c_{44}\beta^2+c_{33}\gamma^2,\ H=(c_{12}+c_{66})\alpha\beta,$$

$$\alpha=p\pi/x_0,\ \beta=q\pi/y_0,\ \gamma=r\pi/z_0$$

u, v, w の振巾 A, B, C. の比は(4)(5)を(3)に入れた結果に(6)から得た ω の値を入れて求める事が出来る。(6)を満足する ω 即ち振動数は与えられた寸法 x_0, y_0, z_0 に対し，無数に多くあるが，冒頭にも述べた様に，吾々は特に y_0 が x_0 及び z_0 に比し充分小さい場合に於いて，(1)式で与えられる周波数からあまり遠くない周波数の振動を主として考える。

(1)式の与える周波数は(6)に於いて $x_0\to\infty$, $z_0\to\infty$ の場合に該当する事は云う迄もない。

x_0, z_0 が有限である場合にも，α, γ は β に比し非常に小さいので，F, G, H は L, M, N に比し非常に小さい。従つて(1)式に該当する角周波数 ω は $\omega^2\rho=L$ で与えられる。或は周波数を f $(=\omega/2\pi)$ で表わせば，

$$(2f)^2\rho=c_{11}(p/x_0)^2+c_{66}(q/y_0)^2+c_{55}(r/z_0)^2\qquad(7)$$

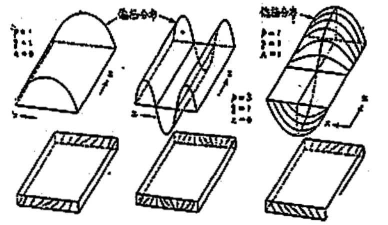
そしてこの場合 B, C は A に比し非常に小さい値となり，変位は事実上 u のみと考えてよい。即ち

*実はこの解では表面に於ける張力だけ零にならないが，一応この程度で甘んずる事とした。

$$u=A\sin(p\pi x/x_0)\cdot\cos(q\pi y/y_0)\cdot\cos(r\pi z/z_0)\cdot\varepsilon^{j\omega t}$$

で，従つて板面に於ける電気偶極の分布状態は $\sin(p\pi x/x_0)\cdot\cos(r\pi z/z_0)$ で与えられる。

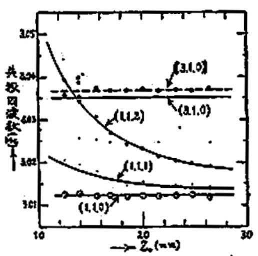
第6図はこの模様を p, q, r の二，三の場合につき



第　6　図

図示したものである。図にも示した様に，この振動の特徴は振動子の外形が変形しない事である*（表面にも変位はあるが）。

第7図中に示す点は x_0, y_0 の寸法を一定に保ち，z_0 の寸法を少しずつ減しながら調べた共振周波数の一部を示す。これに対し(7)式から計算した結果を実線で示した。曲線に附記した例えば(3,1,0)と云う記号は $p=3$, $q=1$, $r=0$ に該当する周波数である事を意味して居る。



（試料寸法 $x_0=21.0^{\text{mm}}$ $y_0=0.55^{\text{mm}}$）

第　7　図

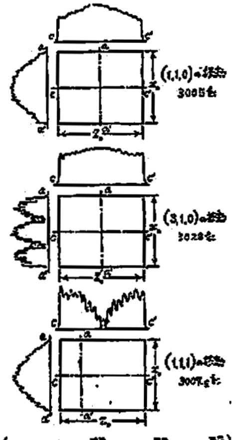
これ等共振周波数の中(1,1,0)が実はこの振動子に対しては只一つの共振周波数として期待されて居た所のものである。以下これを便宜上'主振動'と呼ぶ事にする。(1,1,1)(1,1,2)の曲線に乗つて居る周波数の振動は非常に弱い共振ではあるが，主振動(1,1,0)に周波数が近いので，振動子の使用条件によつては必ずしも軽視し得ない関係上態々振動子を特に強勢に励振して採り上げたものである。

又(7)式から計算した(3,1,0)の値（実線）は，探針法で(3,1,0)である事を確めた共振周波数より稍低い。この短りは後節に述べる一層精密な計算により除く事が出来る。

*Sykes[1] や Terman[4]（恐らく単に Sykes の所論を紹介したものであろうが）の示して居る振動姿態の図は間違つて居る。

尚上述の振動以外にも微弱ではあるが，(3,1,1)等々の種々な振動がある。そしてこれ等の場合に於ける偶極分布や振動数は全く同じ様に説明出来る。然しこれ等の詳細については一応省略する事とした。

第8図は図中に記入した共振周波数で励振した場合の探針法による振動子板面の中心線上に於ける電気偶極の分布を示すもので，巨視的には第6図と同じ形になつて居る。



（試料寸法 $x_0=22.0^{\text{mm}}$ $y_0=0.55^{\text{mm}}$ $z_0=27.0^{\text{mm}}$）

第　8　図

この観測の際(3,1,0)等の場合に，相隣る山形の部分の極性が反対になつて居る事は，励振電源と探針に現われる電圧との位相関係を確める事により比較的容易に判断出来た。そしてこの事が p の奇数の場合しか励振し得ない事をも有力に物語つて居る。即ち p が偶数の時には正負の部分が同数になるから，振動子に対向する電極に対して与える静電誘導は結局なくなる。換言すれば圧電的に励振出来ない。然し p が奇数であつても，振動子の表面は正負差引き $1/p$ の面積の分しか，電極を通じて外部回路とは有効に結合しない関係になるから，共振は p が大きくなる程微弱である。r が0以外の整数の場合，共振が常に微弱であるのも同じ理由による。

尚第8図の偶極分布には，前述した波形の上に，波長の短い，振巾の小さい波が重畳して居るが，その正体については後に論ずる。

6. 高次輪郭振動（其の1）

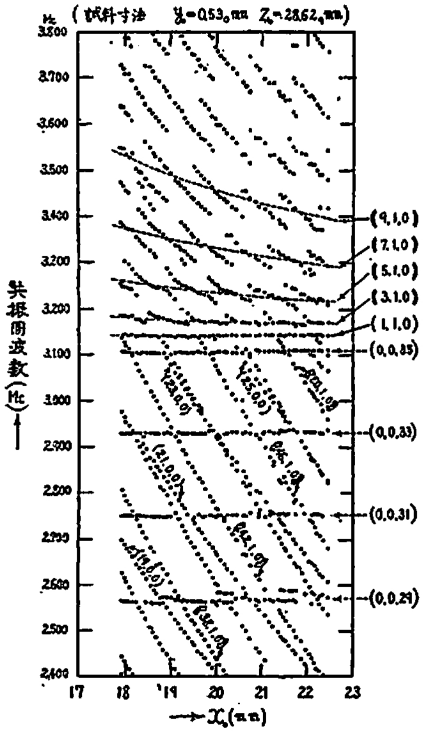
前節では主振動より高い周波数領域のみについて述べたが，主振動より低い周波数領域でも種々な共振周波数がある。そしてその振動は次の3種類に分類する事が出来る。

(1) 共振周波数が板面の一辺 x_0 のみに関係し，他の寸法（y_0 及び z_0）に無関係な振動

(2) 共振周波数が z_0 のみに関係し，他の寸法（x_0 及び y_0）に無関係な振動

(3) 共振周波数が x_0 と y_0 との両者に関係し，z_0 に無関係な振動

第9図は z_0 だけ少しずつ減らし，その都度調べた



第 9 図

共振周波数を示すものであるが（但し前節で述べた (1,1,1) 等の如き弱い共振は略した），この図中主振動 (1,1,0) より低い周波数領域で (21,0,0) (19,0,0) 等と附記したものは前述の (1) 類に属し，(0,0,33)(0,0,31) 等と附記したものは前述の (2) 類に属し，((40,1,0)) の如く附記したものは前述の (3) 類に属する。この事は探針法により，寸法の異なる他の数個の試料についても調べた結果と対照して確める事が出来た。

第 (1) 類に属する振動は云う迄もなく (3) 式に於ける $\partial/\partial y=0$, $\partial/\partial z=0$ である事を意味する。従つて

$$L_0=c_{11}D_x^2,\ M_0=c_{66}D_x^2,\ N_0=c_{55}D_x^2$$
$$F_0=c_{56}D_x^2,\ G_0=0,\qquad H_0=0$$

となる。そこで総ての変位が $\varepsilon^{j(\omega t-\alpha x)}$ の形で表わされると考え，且 $x=0$ & x_0 で歪力が働いて居ないと云う条件を適用すると，既に報告した厚味振動の理論[(1)]と全く同じやり方で，次の結果が得られる。

$$(u,v,w)=(A,B,C)\cos(p\pi x/x_0)\varepsilon^{j\omega t}\quad(8)$$

但し
$$\omega^2\rho=c(p\pi/x_0)^2\quad(9)$$

で，(8) の第1式に対しては $c=c_{11}$，又第2及び第3式に対する c は次の二次方程式の根である。

$$(c_{66}-c)(c_{55}-c)-c_{56}^2=0$$

即ち c=29.03 及び 67.19（単位 10^{10} dynes/cm²）で前者は c_{66}(=29.25) に，後者は c_{55}(=66.97) に非常に近い。これは c_{56} が非常に小さい事に基づく。そして又これが前者に対しては (8) 式の C は殆んど 0 で，後者に対しては B が殆んど 0 になる事も直ちにわかる。

第9図中に (21,0,0)(19,0,0) 等と附記したものは (8) の第3式で与えられた振動である。即ち例えば x_0=17.91 mm の時共振周波数 f=2697 kc で且 p=19 である事が探針法で確になつて居るので（第10図参照）(9) 式にこれ等の値を入れると $c=68.8_5\times10^{10}$ dynes/cm² となり，上述の最後の根に非常に近い。即ちこの振動は (8) の第3式で表わされる振動である事がわかる。

第 (2) 類に属する振動は前述の第 (1) 類に属する振動と全く同じ方針で取扱う事が出来る。即ち今度は (3) に $\partial/\partial x=0$, $\partial/\partial y=0$ を用いる事から出発し，変位及び周波数は次式で与えられる。

$$(u,v,w)=(A,B,C)\cos(r\pi z/z_0)\cdot\varepsilon^{j\omega t}\quad(10)$$

但し
$$\omega^2\rho=c(r\pi/z_0)^2\quad(11)$$

そして (10) の第1式に対しては $c=c_{55}=66.97\times10^{10}$ dynes/cm² である。

第9図中に (0,0,33) (0,0,31) 等と附記したものは (10) の第1式で与えられる振動である。即ち例えば（x_0=19.5 mm の時）共振周波数 f=2928 kc, r=33 であるから，(11) 式に必要な値を入れると $c=68.3_7\times10^{10}$ dynes/cm² となり，上述の c_{55} に非常に近い。即ちこの振動は (10) の第1式で与えられる振動である事がわかる。

以上第 (1) 類，第 (2) 類何れの振動に於いても，奇数次の振動だけしか実験的には現われない理由は，前節で考えたと全く同じ理由による。

第9図の実測結果には，主振動より低い周波数領域で，更に一群の共振周波数が現つて居る。これが前述の第 (3) 類の振動である。又主振動より相当高い周波数領域では，相当複雑した配列を示して居る。これ等に関しては次節以降に論ずる。

7. 厚味振動（其の2）

第5節の (7) 式の与える周波数に於いて p が大き

くなるに従い実測値との距りが目について来る事は既述の通りであるが，その原因は第5節でのやり方が板面に於ける境界条件として $y=0$ & y_0 の両板面に於ける $Y_y=0$ の条件が満足されて居ないのを見逃つた為であろうと考え，この点を改善した所，非常に好結果を得た。そのやり方としては，$r=0$ の場合について考えれば充分である関係上，最初から総ての量の z 方向の偏微分及び w は 0 であるとして出発した。尚 c_{14}, c_{24}, c_{34} 等を無視した事はこの場合も同様である。

今運動方程式 (3) の始めの2式から v を消去すれば

$$\left[(L_0-\rho\partial^2/\partial t^2)(M_0-\rho\partial^2/\partial t^2)-H_0^2\right]u=0\quad(12)$$

今この弾性体内を角周波数 ω の弾性波が或伝搬定数 α で x 方向に進行して居ると仮定する。即ち $u\propto\varepsilon^{j(\omega t-\alpha x)}$ とし，これを (12) に入れると，$\partial^2u/\partial y^2$ に関する二次方程式が得られる。そこで更に $u\propto\varepsilon^{j\beta y}$ と置けば，次の如き方程式が得られる。

$$(L-\omega^2\rho)(M-\omega^2\rho)-H^2=0\quad(13)$$

但し $L=c_{11}\alpha^2+c_{66}\beta^2$, $M=c_{66}\alpha^2+c_{22}\beta^2$,
$$H=(c_{12}+c_{66})\alpha\beta$$

この方程式の与える β^2 の値は二つある（第5節では只一つであるとしたのに対し）。然し変位の性格は勿論 (4) の示す所と殆んど異る筈はないから，これ等の事を考慮して次の如き形で表す。

$$u=(A_1\sin\beta_1y+A_2\sin\beta_2y)\varepsilon^{j(\omega t-\alpha x)}\quad(14)$$

但しこゝでは板の中心面 (neutral plane) を $y=0$ とした（第5節では板面の片方を $y=0$，他の面を $y=y_0$ としたのに対し）

(14) を (3) の第1式に用いれば v が得られる。

$$\alpha(c_{12}+c_{66})v$$
$$=j(J_1A_1\cos\beta_1y+J_2A_2\cos\beta_2y)\varepsilon^{j(\omega t-\alpha x)}\quad(15)$$

但し J_1, J_2 は夫々 $(\omega^2\rho-\alpha^2c_{11}-\beta^2c_{66})/\beta$ に於ける β を β_1 及び β_2 と置いた値である。

振動子の表面が自由である場合の振動に於いては，先ず板の両面（$y=\pm y_0/2$ とする）で歪力が0であると云う条件が満足されなければならない。

$$\left.\begin{aligned}X_y&=c_{66}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,\\Y_y&=c_{12}\frac{\partial u}{\partial x}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

即ち次の関係が成立しなければならない。

$$K(\beta_1)=K(\beta_2)\quad(17)$$

但し

$$K(\beta)=\frac{\omega^2\rho-\alpha^2\{c_{11}-c_{12}(c_{12}+c_{66})/c_{12}\}-\beta^2c_{66}}{\omega^2\rho-\alpha^2c_{11}+\beta^2c_{12}}\times\beta\tan\left(\frac{1}{2}\beta y_0\right)$$

そして更にその上に $x=0$ & x_0 の端面で歪力が零である為の条件が満足されて居なければならない訳であるが，この方は第5節で考えた様に，近似的に

$$\alpha x_0=p\pi\quad(18)$$

で与えられる。

そこで結局共振周波数は x_0 と y_0 とが与えられた場合，p の夫々の整数値（奇数）に対し (13)(17)(18) から β_1, β_2 を消去して得られる訳である。計算の結果は非常に高い近似で (7) 式に於ける c_{11} の代りに $1.2\times c_{11}$ とした場合の周波数に一致する事がわかつた。

第7図及び第9図に於いて主振動 (1,1,0) より高い周波数領域で $(p,1,0)$ の如き様式で附記した破線は計算値を示す。即ち $p=3$ の場合に於いては，計算値と実測値とは非常によく一致して居るが，p が大きくなるに従い，次第に実測点の配列と計算値を示す破線とは交叉した傾向になる。この事については第9節で問題にする。

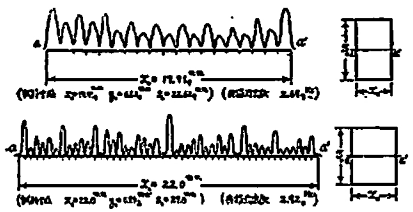
振動姿態は，(4) に非常に近い事は当然の事であるから，中心面を $y=0$ とした今の場合次の様になる事は多く説明を要しない。

$$\left.\begin{aligned}u&=\sin(p\pi x/x_0)(A_1\sin\beta_1y+A_2\sin\beta_2y)\varepsilon^{j\omega t}\\v&=\cos(p\pi x/x_0)(B_1\cos\beta_1y+B_2\cos\beta_2y)\varepsilon^{j\omega t}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

この式に於ける A_1/A_2 は与えられた x_0, y_0 に対し (13)(17)(18) から求めた ω を (16) の何れか一方に入れると決定される。然しこゝではこれ等を具体的に計算する迄もないから省略し，第9図で測定する事とした。

8. 高次輪郭振動（其の2）

第9図を見ると，前節迄に考えた振動の外に，更にもう一種類の振動が現つて居る。この振動は x_0 の減少に伴ない，x_0 に反比例した値以上に高い周波数になるのが特に顕著な事と，もう一つは探針法により電気分極の分布を調べると，x 方向には，既述の他の型での場合と異なり，第11図に示す例（相似の理により第9図に於ける x_0=21.1 mm, f=3041 kc に該当）の様に x_0 を偶数に分割した各点に偏極の極大点が現われて居る事である（z 方向には変化はない）。これ等の事実を考慮して，前節同様板面で歪力が零になる条件を



第 10 図 (上)
第 11 図 (下)

満足する他の解を求めた。

即ち前節に於いては，(13)(17)(18)から求めた振動の角周波数 ω は β_1^2, β_2^2 を共に正（即ち β_1, β_2 を共に実数ならしめる値であつたが，この外に β_1^2 及び β_2^2 を共に負（即ち β_1, β_2 を共に虚数）ならしめる値がある。この場合の数値計算は非常に繁雑であるが，幸い第9図に示す寸法の範囲 $(1.5>y_0/x_0/p>1)$ では，相当高い近似で次の関係に一致する事を知つた。

$$(2fx_0/p)^2\rho=23\tanh(y_0/x_0/p) \qquad (20)$$

但し単位は f を Mc, x_0, y_0 を mm, ρ を g/cm^3 で表わす。

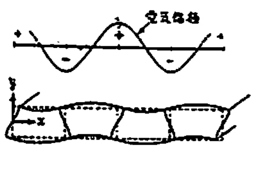
第9図中に例えば ((46,1,0)) の如く附記した実測点の列は上述の振動に於ける p の値が 41 に該当する事を示して居る。

振動姿態は探針法による電気極板の分布が第 11 図の様になつて居る事から，端面の位置を $x=0$ & x_0 とした場合 $\partial u/\partial y\propto\cos(p\pi x/x_0)$ で表されるが事わかる。従つて $u\propto\cos(p\pi x/x_0)$, $v\propto\sin(p\pi x/x_0)$ で，且端面に於いては，$Y_y=0$ 即ち $c_{66}(\partial v/\partial x+\partial u/\partial y)=0$ を満足する事よりも，$X_x=0$ 即ち $c_{11}\partial u/\partial x+c_{12}\partial v/\partial y=0$ を満足する事の方が支配的な要件となつて居る。換言すれば，u, v は次の如き形式で示される。

$$\left.\begin{aligned}u&=\cos(p\pi x/x_0)\left[A_1\sinh\beta_1 y+A_2\sinh\beta_2 y\right]\varepsilon^{j\omega t}\\ v&=\sin(p\pi x/x_0)\left[B_1\cosh\beta_1 y+B_2\cosh\beta_2 y\right]\varepsilon^{j\omega t}\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

これを $p=4$ の場合について図示したのが第 12 図である。

探針に現われて居る結果から見ると，振動子の端面に於ける電気極板は，振動子に配した電極に対し充分な静電誘導を与え得ない様に思われる。これが為 p が偶数の時電極に誘起する電荷は，正負交互に $p-1$ 回即ち奇数回現われ，結局外部電気回路との結合が可能—換言すれば励振可能—になつて居ると考えられる。斯様な関係で，この場合には他の場合と異なり，p の奇数値に対する共振の方が却つて現われて居ない。

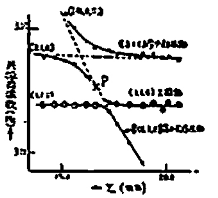


第 12 図

米国[1][2][4]で flexural vibration と名付けて居る振動は，以上述べた高次輪廓振動に該当して居るが，振動姿態が単なる推測に止つて居るので，第12図とは大分趣を異にした姿態が示してある（文献(1) Chapter Ⅳ, p. 236 & 225 参照）ばかりでなく，p の奇数に該当する振動数も実測値として掲げてあるが，実際には奇数次の共振は偶数次の共振に比較すると，事実上とるに足らない位弱い。

9. 厚味振動と高次輪廓振動との結合

第 13 図は第9図の一部を抜き書きしたものであるが，この図と第8図とから，次の様な事柄がわかる。



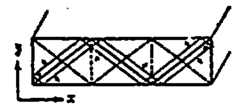
第 13 図

(a) 厚味副振動*と高次輪廓振動とは，弾性的に結合して居る。これが為に，第8図に示す様に厚味の主振動或は副振動を強勢に励振する周波数に於いても，高次輪廓振動が重畳して現われて居る。又第13図に破線で示す様な，x_0 の変化に伴なう厚味副振動の共振周波数の変化を示す破線と，高次輪廓振動の夫を示す破線とが交叉する部分では，実際の共振周波数は実線で示す曲線に乗つて居る。

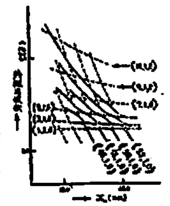
(b) 高次輪廓振動は主振動より低い周波数領域では圧電的に励振し得て居るが，高い領域では励振しにくい事を示して居る。これは振動子の寸法と励振周波数との関係が，例えば第13図の P 点に該当する様な場合，高次輪廓振動に対しては，前節で述べた様に，板面積の 1/45 を介して励振されるに過ぎない上に，この振動と厚味の副振動 ((3,1,0)) が結合して居る為，後者に振動の勢力が相当量吸収され，結局殆ど共振が認められない位微弱になつたものと察される。

(c) 厚味副振動は p の次数の高いもの程，高次輪廓振動との結合が密になつて居る。これは前節迄に論じた厚味副振動にしても，高次輪廓振動にしても，観方を変えると，互に振動の姿態こそ異るが，凡そ第 14 図の如き，弾性体内に於ける平面波に基づく定在波であると云える。従つて厚味副振動の次数が高くなると，その波面は高次輪廓振動の場合の波面と次第に平行に近くなる。これが為に両者の結合は密となり，結合がなければ第 15 図の破線の如き図形となるべきものが，実線の様になる。その上細い実線の部分は，前述した様に励振困難の為微弱である。結局結果は第9図の実例と極めて類似のものとなる訳である。

*第5節で述べた厚味振動中主振動 (1,1,0) 以外のものを便宜上副振動と呼ぶ事にした。



第 14 図



第 15 図

第 15 図は勿論定性的に示したもので，これを更に定量的に論ずるには相当複雑な計算を要するが，具体的に計算する程の価値が明瞭になつたら，他日を期して採り上げる事としたい。

10. 総　　括

以上を要約すると次の様になる。

(a) 薄板状水晶振動子はその輪廓が無限に広ければ，固有振動は三種類あるだけで（その振動数は何れも厚味に逆比例する），且その中の幾つかゞ圧電的に励振し得る（板面に対向した一対の電極板を介して）に過ぎないが，振動子の輪廓は有限である為に，種々な姿態の振動が可能になる。

(b) 筆者の一人（福与）が案出し，探針法と名付けた新な方法，即ち振動子に対向して居る電極を貫いて設けた探針により，厚味方向の電気極板を検出する方法により，振動子の全板面に亘る電気極板の詳細な分布を観察する事が出来，これが振動子の振動を解明する有力な手段となつた。

(c) 筆者等は差当り板面の一辺が水晶の電気軸に平行な矩形板状 R_1 板の振動につき検討したが，その結果次の如き事項が明らかになつた。

(d) 所謂厚味振動なる名称の下に実用に供せられて居る振動（本稿では主振動と名付けた）は，板の輪廓寸法中電気軸に垂直な辺の長さ (z_0) には無関係で，電気軸方向の寸法 (x_0) を短くするに従い，周波数は僅かずつ高くなる。その振動姿態は第6図に示す。

(e) 振動姿態に，便宜上厚味副振動と高次輪廓振動との二つの名称を与えた。前者は主振動より高い周波数の振動で，主振動と同様電気軸方向の寸法 (x_0) が短くなるに従い，振動数が僅かずつ高くなる所の辷り振動で，振動変位に伴ない外形の変化しない振動である。

後者は板面寸法の一方を減少すると，振動数が略これに逆比例して増加する振動で，振動数は板面の他の辺には殆んど無関係である。

尤も高次輪廓振動の中一種類だけは，その振動数が板面の一辺 (x_0) の外に厚味 (y_0) にも関係する。

(f) 振動姿態の異なる2種類の振動が夫々互に結合して居る。

(g) 本稿には比較的共振の著しい振動のみ採り上げたが，この外にも種々な姿態の振動がある事は云う迄もない。

謝　辞　本研究は文部省科学研究費交付金の補助により行つたものである。この研究に関しては東京大学応用物理教室犬井鉄郎教授及び碧津久一郎助教授に種々有益な助言を賜わつた事を深く感謝する。又実験に当つて工大の池田静男君の不断の努力に負う所も少くない．併せて謝意を表する。

引 用 文 献

(1) R. A. Sykes: Chapter Ⅵ, Quartz Crystals for Electrical Circuits edited by R. A. Heising (D. van Nostrand, New York, 1946).
(2) R. D. Mindlin: Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Crystal Plates-J.A.P. 22, 1, (March 1951) p. 316, ; Forced Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates-J.A.P. 23, 1, (Jan. 1952). p. 83.
(3) 古賀逸策，福与人八：水晶周波計，本会誌 33, 8, (昭 25-3). p. 398.
(4) F. E. Terman: Radio Engineering, 3rd Ed. 1947. McGraw Hill Book Co. p. 424, Figs. 8-10.
(5) 古賀逸策：薄板状圧電気振動子の厚味振動の振動数と振動姿態，電学誌，52, 527, (昭 7-6) p. 498 ; Phil. Mag. 16, 104, (Aug. 1933) p. 275.

附録Ⅰ　座標軸の変換に伴う弾性定数の変換

水晶の電気軸を x 軸，主軸を z 軸にとつた場合の弾性定数は（単位 10^{10} dynes/cm^2）

$$\begin{aligned}&c_{11}=85.45 &&c_{12}=7.25 &&c_{66}=\tfrac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\\ &c_{33}=105.81 &&c_{13}=14.35 &&\quad=39.10\\ &c_{44}=57.12 &&c_{14}=-16.82\end{aligned}$$

であるが，第1図に示す様な関係に在る新な座標軸 x, y, z に関し，R_1 板に於いては $\theta=54°45'$（この角度は偶然にも誤差 $1'$ 以内に於いて $\cos^{-1}1/\sqrt{3}$ に等しい事を利用し，計算の手数を非常に省く事が出来た）で

ある事を考慮して計算すると（単位 10^{10} dynes/cm²）

$c_{11}=85.45$　$c_{12}=-6.24$　$c_{13}=27.84$

$c_{14}=-2.26$　$c_{22}=128.01$　$c_{23}=-5.63$

$c_{24}=6.21$　$c_{33}=103.01$　$c_{34}=8.90$

$c_{44}=37.14$　$c_{55}=68.97$　$c_{56}=2.89$

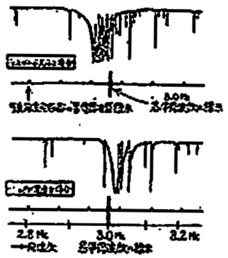
$c_{66}=29.25$

尚本稿では水晶の密度は常に 20°C での値 2.649g/cm³ を採つた。

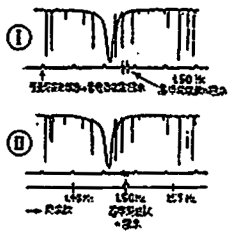
附録Ⅱ　振動子の仕上げ

従来市販されて居る程度の振動子では，その仕上げが不充分の事が少くなく，その板面の平面度及び平行度，輪郭の形を充分入念に仕上げると，共振の複雑性が著しく少くなる。第 16 図は（第 4 節に述べた方法で求めた）その例で，始め上図に示す程度の複雑な共振特性を持つて居た振動子を仕上げた結果，下図の程度になつた。筆者等が対象として居るのは，この第 16 図下図の場合の様に入念に仕上げた振動子に於いて見られる種類のものである。

斯様に入念に仕上げたものについては，全く別の原石から截出した場合でも，全く同じ方位，同じ寸法にさえ仕上げると，全く同じ特性を示す。第 17 図はこの点を確める為に全然独立の二つの試料について調べた結果を対照して示す。



第 16 図　試料（R_2 板）仕上寸法（mm）：
0.84₂×21.64₈（電気軸方向）×25.12₂



第 17 図　試料（Ⅰ′ 板）仕上寸法（mm）：
1.33₅×14.39₀（電気軸方向）
×14.50₄（主軸方向）

（昭和 27 年 9 月 1 日受付）