

短 圓 壙 の 縦 振 動*

會 員 吉 賀 逸 策

(東京工業大學電氣工學科)

Longitudinal Vibrations of Short Circular Cylinders.

By Issac KOGA, Member (The Tokyo University of Engineering)

内 容 梗 概

水晶振動子、磁歪振動子等の振動を取扱ふ上に於て、短い壙狀の縦振動を嚴密に論じて置く事は極めて重要な事である。筆者の知る限りでは此問題を具體的に解いたものは未だ發表されて居ない。従來は壙の長さに比し斷面積が十分小さい場合について求められた周知の結果を以て代用して居たが、その與ふる所の振動周波数は偶々數量的に實際の固有周波數と一致する場合もあるが、本質的には餘程懸隔がある、殊に振動の姿態の如きは従來豫想されて居たものとは非常に相違してゐる。此等の事情から、先づ等方性物質から成る短圓壙の縦振動の週期及振動姿態を論じ、これから得らるゝ所の諸種の性質を調べて結論に掲げた様な著しい新事實を得た。水晶振動子の如き結晶體に於ては、數學的に同様な議論を進めて行く事が極めて困難であるから、本稿では問題を等方體の場合に局限したが、その結果は定性的に結晶體の場合に於ける現象を説明し得る點が少くない。

1. 緒 言

近時水晶振動子の應用が高周波工學の實用的方面に著しく發達したが、これに伴つて多數の振動子について各種各様の實驗的研究が試みられた。その結果、振動子の固有振動數は極めて複雑な内部的關係に支配されて居る事は今日何人と雖も否定する者はなくなつた。實際に製作するに當つても所期の目的に副ふ振動子を製作する事が必ずしも容易でない場合が多い。例へば或る與へられた固有振動數の振動子を作らうとするには、その周波數と、これに直接關係を有する寸法との關係を表す實驗式から大體の寸法を定める譯であるが、出來上つたものは、材料を十分吟味してあるに係らず、屢々容易に發振しないものがあるかと思ふと、所期の周波數に非常に接近した他の一つの周波數を有する事がある。何故に斯様な現象が起るかと思ふ事に就ては、さきに Lack⁽¹⁾氏が電氣的比喩によつて定性的に説明を與へた位に止つて居る。その内容を此處で詳しく繰返す事は避けるが Lack 氏の云ふ所によれば、水晶振動子には壓電氣現象に基いて色々な姿態の自由振動を刺勵せしめ得るが、その周波數の種類及夫々の高調波に相當する固有周波數を有する所の等價電氣回路が互に相結合された様なものと考へると、實際の振動周波數は、この等價電氣回路の有する周波數(即ち結合回路に於ける固有周波數)が如何なるものであるかを調べる事に歸すると云ふのである。この説明の方法によれば、雖に外面的の結果は實際と其傾向がよく一致して居るので大變面白いと思ふ。只こゝに注意しなければならない事は Lack 氏の電氣的比喩法を以て代表された電氣振動回路は實際的には如何なる關係にあるかと云ふ點が全然明にされて居ない事である。

* 本研究は電氣學會大井電信電話獎學資金による補助及文部省科學研究獎勵費補助金を仰いで行つたものである。

† 周氏論文中(4)式の $(\omega_1^2 - \omega_2^2)$ とあるのは明に $(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2$ の誤である。

一方に於て今日に至る迄殆ど未解決の儘になつて居る次の様な事實がある。即ち Curie 氏式切方による水晶振動子には三種類の特に著しい振動周波数がある。其中、最高及最低の二周波数は縦振動に基くものである事は殆ど疑問の餘地を残さないが、中間の周波数に相當する振動の姿態に就ては十分な根拠を有するものが發表されて居ない。或は壓電氣的に生ずる所の迂りの歪に相當する迂り振動ではないかと云ふ説もあるが、これは全然採るに足りない。何となれば元來迂りの歪なるものは、見方によれば伸縮の歪と何等異なる所のない性質のもので、只その歪を表す座標軸の方向の選び方によつて或は迂りの歪ともなり、或は伸縮の歪ともなるのである。然らばこの中間周波数も縦振動に基くものであるかと云ふに、さうだとも考へられない節々が少くない。(此問題は夫自身で相當論すべき點もあり、今此處には直接深く立入るのは當を得ないと思ふから、別の機会に論ずる事にしたい)。所が闕らずも此振動は本稿に述ぶる所の短棒の縦振動には必ず存在する性質の放射状振動である事が明にわかつた。

此外にも色々新しい事實が明にされたが、此等は總て從來開却されて居た短棒に就ての縦振動を忠實に調べたわけ得られたのである。以上略述する所によつて短棒の縦振動を論ずる事の極めて必要であり、且貴重な結果を與へる事はわかる譯であるが、吾々の理想としては、最初に述べた水晶振動子の如き結晶體に就て具體的に明確な結論を得たいのであるが、此問題に觸れる前に、豫備行爲として先づ等方性物質に就て論じ、漸次歩を進めて行くのが最も適切な方法であると思ふ。尚又等方性の物質に就ても管體の断面の形狀は色々な場合があるが、本稿ではその中最も取扱上便利な圓形の場合のみに問題を局限し、他の重要な矩形の如き断面の場合に就ては稿を更めて考へる事にした。

2. 短棒と長棒との縦振動

從來棒體の縦振動と云へば、その長さが断面の寸法に比較して十分長い場合に限られ、反對に断面の寸法に比較してその長さ(と云ふより寧ろ普通に云はれて居る様に厚さと云つた方が適當であらうと思ふが)が十分小さい場合を論じたものは筆者の知る限り先づ見當らない様である。これは後者が弾性學上難解であるからではないので、全く左様な振動が最近迄経験されなかつたので、何人も問題としなかつた爲であると思ふ。事實此様な特別な振動は水晶振動子が現れて初めて實在的のものになつた。周知の様に、兩端の自由な長い管體の縦振動に於ては、その基礎週期は断面の形の如何に係らず、略々次の關係で決定される。

$$\frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \times \frac{2\pi}{p} = 1 \dots\dots\dots(1)$$

式中 $2\pi/p$ は振動の週期、 E は弾性率、 ρ は物質の密度、 l は棒體の長さである。尤も精密に考へれば、週期は断面積によつて多少左右されるが此等は Lord Rayleigh⁽²⁾, Love⁽³⁾ 氏等の書籍にもある事であり、此處にはその結果を擧げる程の必要はないから略する。

短い棒體の振動に於ては、數量的には振動週期が問題にされるだけで、その振動姿態等は、水晶振動子にしても、今日の所殆ど直接の手段で観測する事が出来ないで、あまり問題にされない。所が幸か不幸か振動週期の値は(1)式の關係が大體當該する。こんな事情で今日では一般に(1)式の關係を出す際には明瞭に斷つてあつた大切な條件、即ち断面の寸法に比し十分長い棒體であるべき事を忘れたかの如く、専らこれに頼る習慣になつてしまつた。然しこれは勿論數量的に偶然一致するに過ぎないので、根本的には(1)式とは全然相違した形のものであるべき事は想像に難くない。

問題を弾性學的に論ずる前に、短い棒體と長い棒體との間には、縦振動の際に如何なる著しい相違があるかを、豫め少しく常識的に考へて置く事も強ち無駄な事ではないと思ふ。從來取扱は

れて居た長い棒體に於ては、その軸の方向への變位に伴つて軸に直角な方向の變位も生ずるが、この變位は軸の方向の變位の大小に相從つて同期的に生ずると見て殆ど誤はない。従つて長い棒體の振動の際に於ける斷面積の影響と云ふものは、軸に直角な方向の同期的變位運動による運動の勢力を考へるれば求められる。その結果として振動週期は斷面積が大きくなるに従つて (1) 式の與ふる値よりも多少長くなるが、それ以外には何等複雑な現象を招く事はない。所が非常に短い棒體に於ては、振動の姿態が餘程趣を異にして居る。即ち今假に斷面の任意の部分に於て軸の方向に週期的變位を興へたとする。この變位は軸の方向には、たとへ同期的に生じて居ても、斷面の寸法が十分大きければ、軸の方向の一周波の變位に伴つて生じた放射狀の變位が未だその周邊に達する前に、軸の方向には次の周波の變位が行はれ、これに相當する放射狀の變位の波動が先の變位の波動の後を追つて周邊に向つて進む。斯様に軸の方向の振動があれば、必ずこれに伴つて放射狀に變位の波動を生ずる。この周邊で反射されて再び内側へ返る。従つて若しこの往復の波動の位相が一致する様な關係にあつた場合には、外見的には軸の方向の縦振動としてよりも、寧ろ放射狀の自由振動をして居る事になる。反對に軸の方向の振動が特に著しい様な關係にある時には、吾々が所謂厚さによつて定まる週期の振動と呼ぶものになる譯である。更に此兩種の振動が同時に相當著しく現れ得る様な條件になつて居たとすれば、此處に初めて複雑な關係が生れるのである。

以上の事實は又次の様にも云へる。棒體の軸の方向への變位と放射狀の變位とは、一方が起れば、他は必ずこれに伴つて生ずる。従つて厚さによつて定まる週期の縦振動と、放射狀振動とは必ず相伴つて生ずる譯であるから、若したとへこの棒體を軸の方向に判斷したとしても、其判斷週期が何れの振動を著しからしむるかによつて、棒體は所謂軸の方向の振動ともなり放射狀振動ともなるのである。而してこの二種の週期がある特別な關係にある場合には、問題が錯雜するであらう事も凡そ判斷がつく。

斯様に考へて來ると、例へば Curie 氏式切方による水晶振動子に於ては、壓電氣縱効果によつて、電氣軸の方向の縦振動と、電氣軸に直角な方向の放射狀振動との二種の振動をなさしめ得る事が容易に了解出来る。即ち所謂中間周波數なるものは、この放射狀振動に該當するものである事も同時に了解し得る譯である。

此等の種々複雑した關係を一括して彈性學的に求めて置けば、單にその結果を物理的に解釋するだけで事足り前述の様な特殊な場合等も特に切離して論ずる手數もなくて済むから大變都合がよい事は云ふ迄もない。

3. 短圓錐の縦振動の運動方程式

彈性體の運動の方程式は圓筒座標軸 r, θ, z に關して書表すと

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + 2\mu \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - 2\mu \frac{\partial \psi_r}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_\theta) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となる。式中

$$\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2\phi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\phi_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad 2\phi_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial z} (r\psi) - \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

で、 u, v, w は夫々 r, θ, z の方向の変位、 ρ は前に用ひたと同様物質の密度、 λ 及 μ は物質によつて定まる常數で、弾性率 E 及ポアソン比 σ と次の如き關係を有する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} \\ \text{即ち } E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

今若し $z = \pm l$ 及 $r = a$ の面で境されて居る圓筒があつて、これが $z = 0$ の面及 z 軸に關して全く對稱的な形の振動をする場合について考へるならば、總ての量は θ に無關係となるから(2)の第二式は恒等的に成立し、同時に第一第三の式は次の如く簡單化される。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \dots\dots\dots(4)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \dots\dots\dots(5)$$

但し $\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u) + \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots(6)$

$$2\psi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \dots\dots\dots(7)$$

此微分方程式を解く爲に* 先づ

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \times (4) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} (5) \text{ の形を作ると}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots(8)$$

$\frac{\partial}{\partial z} (4) - \frac{\partial}{\partial r} (5)$ を行はば

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots(9)$$

を得る。若し總ての部分の歪が時間に対して正弦波形に變化すると假定するならば

$$\phi \propto e^{i p t}, \quad \psi \propto e^{i p t} \dots\dots\dots(10)$$

と置く事が出来る。 e は自然對數の基數、 i は $\sqrt{-1}$ 、 $2\pi/p$ は振動の週期、 t は時刻を表す變數である事は殆ど説明を要しない。この假定から次の關係を得る。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0 \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \dots\dots\dots(12)$$

但 $k^2 = \frac{r^2 \rho}{\lambda + 2\mu}, \quad k^2 = \frac{p^2 \rho}{\mu} \dots\dots\dots(13)$

* 此微分方程式の解法については東大地震研究所林澤克博士の御高教を蒙りし事を深謝する。

此等二式を解くには普通行はるゝ様に ϕ 及 ψ 共に r のみの函数 R と z のみの函数 Z との積であると假定する。即ち

$$\phi = R(r) \cdot Z(z) \dots\dots\dots(14)$$

とすれば (11) 式は

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + k^2 = -\frac{Z''}{Z} = -\alpha^2 \dots\dots\dots(15)$$

の如き関係となる。 R'' , R' 及 Z'' , Z' は夫々 R 及 Z の r 及 z に就ての第一及第二微分係数。 α は或る定數で後に環境條件によつて支配されるものである。(15) 式は容易に解き得る方程式で結局

$$\phi = A J_0(\xi r) \cosh \alpha z \cdot e^{i\mu t} \dots\dots\dots(16)$$

を得る。同様の方法で

$$2\psi = B \frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} \sinh \beta z \cdot e^{i\mu t} \dots\dots\dots(17)$$

となる。但し

$$\alpha^2 = \xi^2 - k^2, \beta^2 = \xi^2 - k^2 \dots\dots\dots(18)$$

で A, B 共に勝手な定數である。(16) (17) の兩式は中途の手續を少し略したが、事情が $z=0$ の平面及 z 軸に對して全く對稱である事を考慮に入れて簡略化した結果である。

所で總ての物體の微小な歪と云ふものは必ず互に直角な三方向への伸張 (dilatation) と廻轉 (rotation) との二種類の成分に分つ事が出来る。そこで前者の成分として、 $\psi=0$ で而も ϕ が (16) 式で與へらるゝ様な u_1, w_1 を (4) (5) 兩式から求むれば

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -A \frac{1}{k^2} \frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} \cosh \alpha z \cdot e^{i\mu t} \\ w_1 &= -A \frac{\alpha}{k^2} J_0(\xi r) \sinh \alpha z \cdot e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

となり、後者の成分として $\phi=0$ で ψ が (17) 式で與へらるゝ様な變位 u_2, w_2 を同じく (4) (5) 兩式から求むれば

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= -B \frac{\beta}{k^2} \frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} \cosh \beta z \cdot e^{i\mu t} \\ w_2 &= -B \frac{\xi^2}{k^2} J_0(\xi r) \sinh \beta z \cdot e^{i\mu t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

となるから、結局 (4) (5) 兩式を満足する變位 u, w の一般解式として次の如きものが得られる。

$$u = u_1 + u_2 = -\frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} e^{i\mu t} \left\{ A \frac{1}{k^2} \cosh \alpha z + B \frac{\beta}{k^2} \cosh \beta z \right\} \dots\dots\dots(21)$$

$$w = w_1 + w_2 = -J_0(\xi r) e^{i\mu t} \left\{ A \frac{\alpha}{k^2} \sinh \alpha z + B \frac{\xi^2}{k^2} \sinh \beta z \right\} \dots\dots\dots(22)$$

吾々はこゝで l は α に比較して相當小さいと假定する。且この圓筒の外面は全く自由で何等外力を加へられて居ないとする。(實際にはこの圓筒は例へば軽く平面上に置いてあるが、圓筒

に働く重力は無視しても善々の場合には一向差支ない。そうすれば次の様な環境条件が與へられた事になる。

$$z=l \text{ に於て } \begin{cases} \lambda\phi + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(23) \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(24) \end{cases}$$

$$r=a \text{ に於て } \begin{cases} \lambda\phi + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots(25) \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots(26) \end{cases}$$

即ち (23) (24) の兩式は圓錐の断面が自由で張力も剪断力も働いて居ない事を表し、(25) (26) 兩式は圓錐の側面に於て張力及剪断力が働いて居ない事を表すものである。然し善々の得た解式は (23) 乃至 (26) の四つの条件を常に盡く満足せしむる事は不可能である。これは各部の變位が僅て単弦運動であるとの近似的假定をした爲である。これと同様の事は從來書籍に擧げておつた l が a に比し充分大きい場合にも起つて居た事で、その場合には兩端の二面に於ける條件たる (23) (24) の兩式は大して重要性を帯びて居ないから、側面に於て (25) (26) を満足する様に解いて居る⁽²⁾。各々の場合に於ては、事情は全く逆で、圓錐の表面の大部分をなす所の二底面に於ける (23) (24) の兩条件を満足せしむる様にする事が最も大切な事である。即ち (16)(22) の兩式を (23) 式に入れ同時に (13) 式から得らるゝ關係

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{k^2}{h^2} - 2 \dots\dots\dots(27)$$

を利用すれば

$$-\frac{B}{A} = \frac{k^2(\xi^2 + \beta^2)}{2\beta\xi^2 h^2} \frac{\cosh \alpha l}{\cosh \beta l} \dots\dots\dots(28)$$

を得る。又 (21) (22) を (24) の条件に入れると

$$-\frac{B}{A} = \frac{2\alpha k^2}{h^2(\xi^2 + \beta^2)} \frac{\sinh \alpha l}{\sinh \beta l} \dots\dots\dots(29)$$

となるから (28) (29) の兩式から次の關係が得られる。

$$\frac{\tanh \beta l}{\tanh \alpha l} = \frac{4\alpha\beta\xi^2}{(\xi^2 + \beta^2)^2} \dots\dots\dots(30)$$

斯様に (23) (24) の兩条件を完全に満足する様に定むれば、最早 (25) (26) の兩条件は完全に満足せしむる事が出来なくなる。然し善々の場合には、この側面の条件は左程重大性を帯びて居ないから、例へば側面に於て張力及剪断力の平均値を零ならしめる様な事で満足出来る。先づ (26) 式の方は $z=0$ 及 $z=\pm l$ の三箇所で自然に成立して居る。その他の部分でも完全にとは云へないが、近似的には成立して居る。そこで善々は (26) 式は自然に成立して居るものと見て看過する事にする。残る所の (25) 式は $r=a$ の面上總ての點に於て満足せしむるのが至當であるが、これは前述の様に不可能の事であるから、表面に於ける平均値を零ならしめる事を条件として我慢する。即ち

$$\frac{1}{l} \int_0^l \left(\lambda\phi + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} dz = 0 \dots\dots\dots(31)$$

を計算し且 (29) の關係を代入し、同時に (18) (27) 等を用ふれば次の如き條件を得る。

$$\frac{d^2 J_0(\xi a)}{d(\xi a)^2} + \frac{\xi^2 + \beta^2}{2\xi^2} J_0(\xi a) = 0 \dots\dots\dots(32)$$

要するに吾々は (23) 乃至 (26) の環境條件を満足すべき關係として (30)(32) の兩式を得た譯である。云ふ迄もなく此等兩式から得らるゝ週期は無數に多くあるから、(21) (22) の兩式は實は此等無數の週期の總てに相應する變位の和として表すべきであるが、態々書直す迄もなく自明の事であるからそのまゝにして置く。若し水晶振動子或は磁歪振動子の如く電氣的回路と結びつけ、その調整によつて持續振動を行はしめる様な場合には、或る特別な一つの週期のみの振動となる。

4. 振動週期

振動週期を求めるには (18) (30) (32) の三式から α, β, ξ を消去すれば得られる譯であるが、これには Lamb⁽⁶⁾ 氏が採つた様な特別な技巧を施さなければ到底尋常一様の手段では六ヶ敷い。即ち先づ (18) (30) の兩式から ξ/k と ξl との關係或は $1/k$ と $1/\xi l$ との關係を出し、これに (32) から得られる (ξa) の値を組合せるのである。そうすると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi}{k} &= \frac{\xi a}{ka} = \frac{(\xi a)}{a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \times \frac{1}{p} \\ \xi l &= \frac{(\xi a)}{2a} \times 2l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

であるから ξ/k と ξl との關係は a 即ち圓筒の半径が一定である場合に、その軸に沿ふての長さ $2l$ の變化に伴つて振動週期が如何に變化するかを與へる事になる。又 $1/k$ と $1/\xi l$ との關係を求めて置けば

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{2}{2l} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \times \frac{1}{p} \\ \frac{1}{\xi l} &= \frac{1}{(\xi a)l} \times a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

であるから、この方は圓筒の長さ $2l$ を一定に保つた場合にその断面の半径 a の變化によつて週期が如何に變化するかを表す事になる。

吾々はこれから (33) (34) の關係を具體的に求めやうと云ふのであるが、ありふれた色々の弾性體に就てそのポアソン比 σ を調べて見ると、多く $1/3$ 内外になつて居る。そこで

$$\sigma = \frac{1}{3} \text{ 即ち } \lambda = 2\mu \dots\dots\dots(35)$$

の場合を主として取扱つて見る事にした。周知の如く σ は必ず 0 と $1/2$ との間の値を有するもので、 λ の方で云へば 0 から ∞ 迄變化があるが、幸にして σ の色々な値に對する ξ/k と ξl 或は $1/k$ と $1/\xi l$ との關係は大した差異を認めない。(附録 I 參照)。従つて極く大體の傾向を知るには σ の或る特定の値に就て得た結果を用ひて差支ない。又 (32) 式の根はポアソン比及圓筒の寸法によつて實際には左右される譯であるが、その變動は吾々に必要な範圍では大して甚だしいものでなく、又その變動を考へ入れて解いても、結果の上には左程報ひられる所もないから、特種の事情ある場合の外は、便宜上 (32) 式の根中その中間に位する値を與へ、而もポアソン比に無關係な根を與ふる

$$\frac{d^2 J_0(\xi a)}{d(\xi a)^2} = 0 \text{ 即ち } \frac{d J_1(\xi a)}{d(\xi a)} = 0 \text{ 或は } (\xi a) J_0(\xi a) = J_1(\xi a) \dots \dots \dots (26)$$

を(22)式の代りに採用する事とする。(附録 II 参照)。この式を満足する根は(零と云ふ根があるが、これは勿論吾々には不用である)

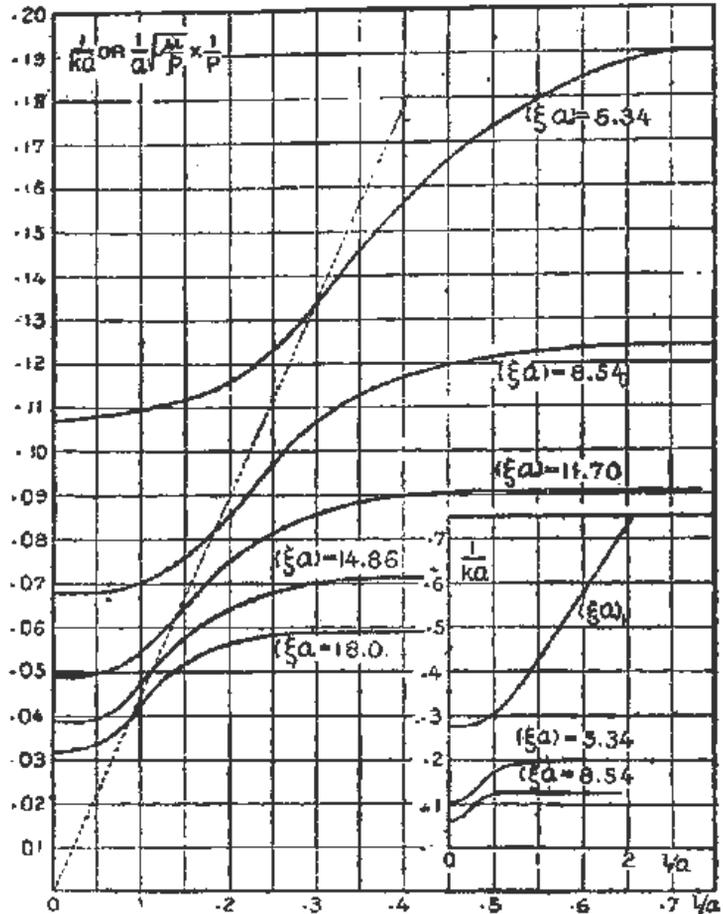
$$(\xi a) = 1.84, 5.34, 8.54, 11.70, 14.86, \dots \dots \dots (37)$$

の如きものである。

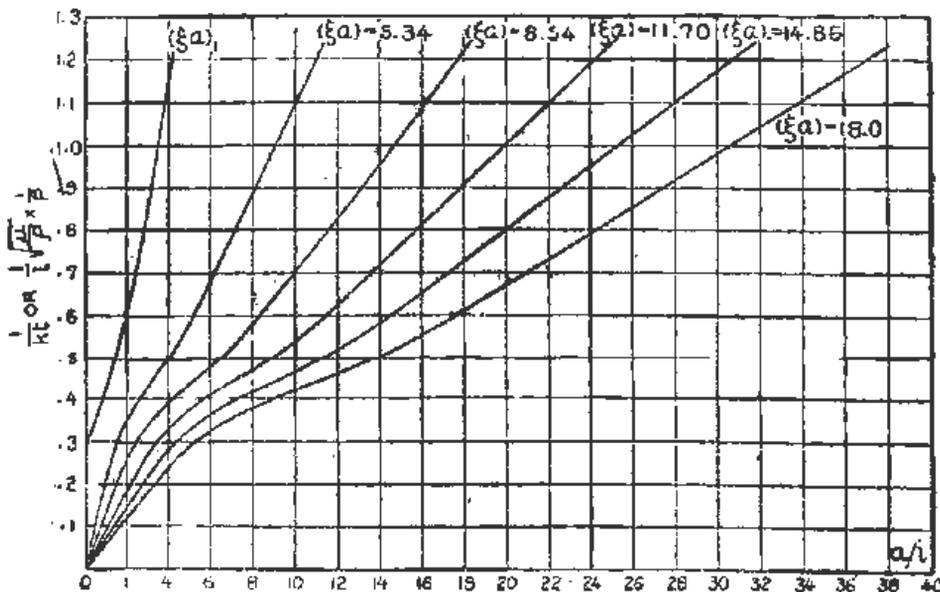
以上の結果を総合し、本節の初に説明した様に、 (ξa) の夫々の値に對する寸法と週期との關係を求めると、半径 a を一定にし、長さ $2l$ を變化した場合には第一圖、長さ $2l$ を一定にし半径 a を變化した場合には第二圖の様になる。この結果が Lock⁽¹⁾ 氏論文中の第八圖及第九圖に極めて酷似して居る事は非常に興味ある點である。今暫く此等の圖に現れた二三の特性を考へて見やう。

先づ最初に忘れてならない事は、此圖は l/a が 1 に比し相當小さい事を條件として得られた結果であるから、第一圖に於ては比較的右側の部分、第二圖に於ては比較的左側の部分はあまり信頼出來ない事である。(附録 II 参照)。而して第一圖に就て見ると振動週期には二種類の特長ある部分がある。

第 一 圖



第 二 圖



ある。一つは曲線の左端で、水平に近い部分即ち週期が長さ $2l$ に殆ど無關係な部分、一つは曲線の傾の最も大きい部分即ち長さ $2l$ の變化に對する週期の變化の最も著しい部分である。

今便宜上前者を代表せしむる爲に、 l が零になつた時の極限値をと

ると、附録にある (58) 式から

$$\frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E}{1-\sigma^2}} \times \frac{2\pi}{p} = \frac{1}{(\varepsilon a)} \dots\dots\dots(38)$$

と云ふ關係を得る。但し式中の (εa) は (32) 式の根、或はその代用値たる (37) の如きものである。この週期は一目して明な様に、圓柱の半径 a に正比例して居る。所謂吾々が直径によつて定まる週期と名付けて居た所のものゝ一つである*。極く大體の見當をつける場合等には σ を約 $1/3$ と見れば (38) で與へらるゝ週期中最も長い値は次の式で間に合ふ。

$$\frac{3}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \times \frac{2\pi}{p} = 1 \dots\dots\dots(38')$$

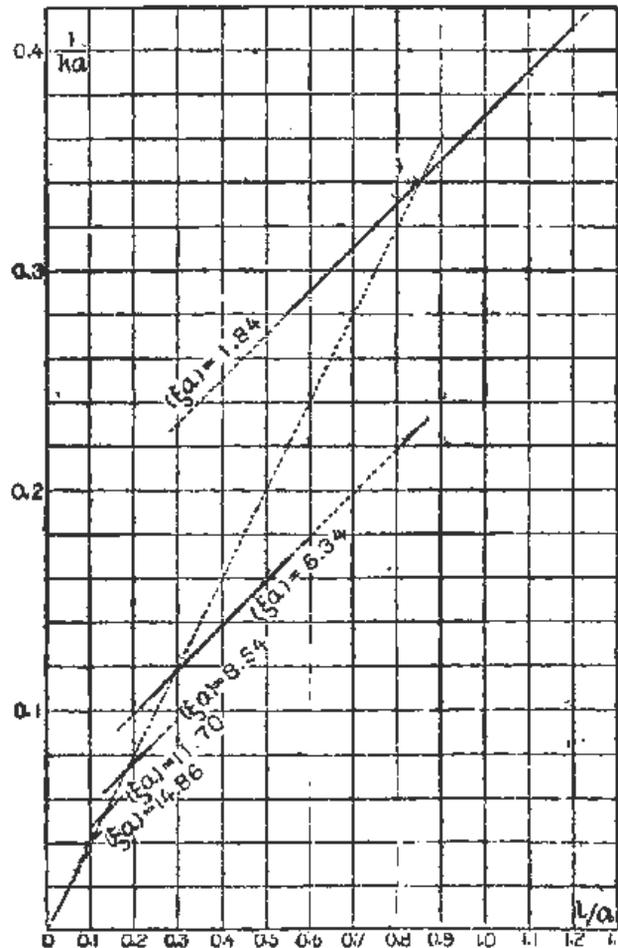
他の一つの週期即ち圓柱の長さ l に従つて著しく變化する方の週期としては、便宜上附録(60) 式で代表されて居る値 (第一圖中の點線と曲線との交點) を採る。と云ふのは、此點は第一圖或は第五圖で見受ける様に略々曲線の最も急峻な部分†で、而も此點の附近での性質は、 σ の如何に係らず共通で、取扱に便利であるからである。

第 三 圖

今附録 I で得られた (60) 式を書直すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{kl} &= \frac{\sqrt{5}}{\pi} \\ \text{即ち } \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} \times \frac{2\pi}{p} &= 1 \\ \text{或は } \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E}{1+\sigma}} \times \frac{2\pi}{p} &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots(39)$$

となる。即ち若し第一圖の點線と曲線との交點に當る様な寸法の割合を常に保たしめたならば、 l の變化に對する週期の變化は (39) 式で表される譯である。然し a を一定にして置いて l だけを変化せしめたならば、上述の様な寸法の附近では週期の變化の割合が丁度半分になる事が附録 (63) 式と (39) 式とを比較する事によつてわかる。第三圖は第一圖に於ける點線の附近だけを主として採つて上の事柄を説明したものである。特に l が a に比し相當小さくなつて來ると、曲線が非常に密集するから、 a を一定にして l だけ變化した場合でも、週期は宛も點線に沿つて變化するかの觀を呈する。換言すれば (39) 式が其儘適用出来るのである。



るのである。水晶振動子、磁歪振動子等で振動週期の極めて小さいものにあつては、その週期が厚さに正比例して變化する様に思はれて居たのもこの爲である。(Lack⁽¹⁾ 氏第四圖参照)。

* 他の一つは軸に直角な方向の振動の週期で最も長い。この振動については別の機會に論ずる事にしたい。

† 此點は曲線の彎曲點 (inflection point) ではないから嚴密な意味では最も急峻な部分だとは云へない。

要するに、吾々が取扱つて居る場合の様に l に比し α が相當大きい場合には、振動の週期は弾性 E が等しくてもポアソン比 σ の相違によつて相當異なるべき事は容易に想像し得る所で、此式はこの事實を具體的に表したに過ぎない。従來吾々が便宜上借用して居た (1) 式はこの關係から見ると、つまり σ の影響を無視したものになる譯である。

尙 Lack⁽¹⁾ 氏は上に得た (39) 及 (38) 兩式で與へらるゝ所の p の値を夫々 ω_1 及 ω_2 と置き、直ちに問題を電氣的比喩を以て論じた事になる。

5. 振動周波數と溫度との關係

序であるから溫度係數に就て一言したい。と云ふのは普通の物質の彈性率は溫度の上昇と共に減少するものであるから、従つてその振動周波數は當然下るべきであるに係らず、水晶振動子、磁歪振動子等は場合によつては却つて多くなるのは極めて奇異な事であると云ふ様な話を屢々耳にするが、この問題は次の如く考へれば少くともその可能性は容易に説明し得る。

今 (38) 式の溫度 T についての對數微分係數をとれば、全質量及 l/a が溫度に無關係である事を入れて

$$2 \frac{\partial p/p}{\partial T} = - \frac{\partial l/l}{\partial T} + \frac{\partial E/E}{\partial T} - \frac{\partial \sigma/(1+\sigma)}{\partial T} \dots\dots\dots(40)$$

を得る。而して凡て物質はその溫度の上昇に伴ひ E 及 σ 共に減少し、 l は増加する事は明であるが、その程度は材料の性質及溫度によつて千差萬別である。従つて (40) 式に於ける右邊の第一項と第三項との代數差 (算術的には和になる) が第二項を凌駕するに至れば、周波數の溫度係數は正となる譯である。

此關係は (38) 或は (39) 式の如き短圓錐の場合に限らず、 α に比し l が充分長い長圓錐の場合に於ても、その斷面積による更正を施した式*を用ふれば、全く同じ様に證明出来る。

何れの場合にせよ、溫度の上昇に伴ひ周波數の増加する現象は、その附近の溫度でポアソン比の減少率及塔體の膨脹率の兩方或は何れかより、彈性率の減少率に比して特に著しい爲だと考へれば別に不思議な現象でもない。

6. 振 動 姿 態

振動姿態を知るには (21) (22) 兩式と、(30) (32) 兩式との間から ξ, α, β 及 A, B の中の何れかを消去したものを求むればいゝ譯であるが、前述の様に振動週期が中々複雑であるから、その振動姿態を如實に表すには、一般的に處理するよりも、特に興味ある一二の場合に就て別にやつた方が簡明である。そこで吾々は次の二つの特別な場合の振動姿態のみを擧げる事にしたがそれ以外の場合も此等から凡そ察知し得る事は説明する迄もない。

(a) $\xi^2/k^2=1/2$ の場合 (附録 (60) 式参照)

此場合には振週動期、變位等が、何等近似的解法を施す事なくして極めて簡単に得られ、而もその變位はポアソン比の如何に係らず全く同じ形で表し得る。

今其變位を示す式を求むれば (附録 III 参照)

$$u = CJ_1 \left(\xi \alpha \frac{r}{a} \right) e^{i\omega t} \cdot \cos \left(\sqrt{2q+1} \frac{\pi}{2} \frac{z}{l} \right) \dots\dots\dots(41)$$

$$w = -CJ_0 \left(\xi \alpha \frac{r}{a} \right) e^{i\omega t} \cdot \sin \left(\sqrt{2q+1} \frac{\pi}{2} \frac{z}{l} \right) \dots\dots\dots(42)$$

* 例へば Love (3) 氏 p. 290 の (56) 式参照。

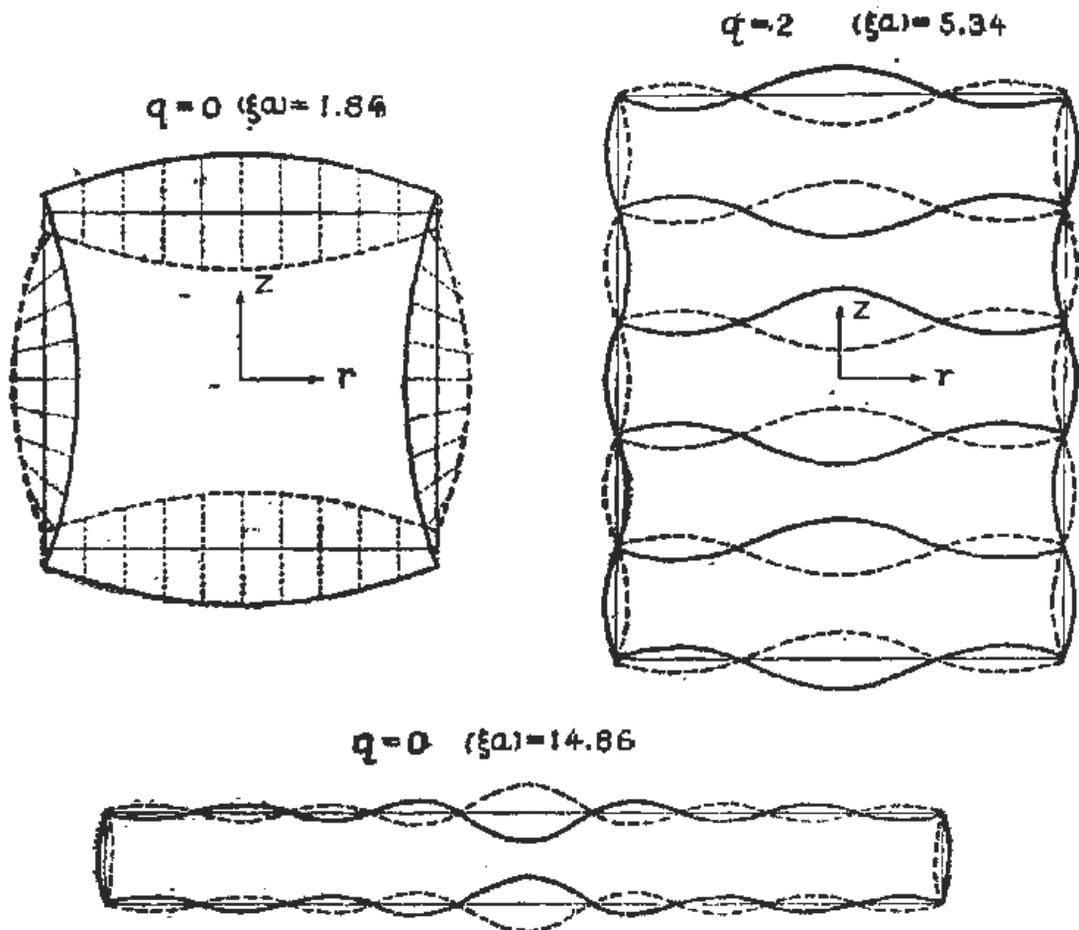
但し $\frac{dJ_1(\xi a)}{d(\xi a)} = 0$ ($\xi a = 1.84, 5.34, 8.54, 11.70, 14.86, \dots$)..... (36) (37)

$$\frac{l}{a} = \frac{1}{(\xi a)}(2q+1)\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots(43)$$

で q は零を含む任意の正整数である。

第四圖は此場合の一、二の例に就て描いた振動姿態であるが、何れも軸上の點の變位が最も著しいから、吾々は此の姿態を假に軸振動と呼ぶ事にする

第 四 圖



(b) $\xi/k^2 = \frac{1}{2}(1-\sigma)$ の場合 (附録 (58) 式参照)

これは $l/a=0$ に於ける極限值として得たものであるが、便宜上 l/a が非常に小さい範圍では成立して居る關係であると考へて變位の式を作れば (21) (22) 兩式は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} u &= De^{i\omega t} J_1\left(\xi a \frac{r}{a}\right) \\ \omega &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

但し $\frac{dJ_1(\xi a)}{d(\xi a)} = 0$ (36)

此場合の振動姿態は圖示する迄もなく自ら明な所で、今度は放射状に起る變位が最も著しく現れるから、この方の振動を放射状振動と名付ける事にする。

同じ l/a が小さい場合でも (43) 式に於ける ξa が非常に大きい場合の振動とは、その週期に

於ても、振動姿態に於ても全く異つて居る。

7. 結 論

1. 軸の方向の長さが直徑に比して短い等方性物質の圓棒が、軸に對して全く對照的な振動をする場合には、その振動週期は第一圖乃至第三圖の曲線で與へられる。これを便宜上主として軸の方向の長さに支配されて著しく變化し直徑にはあまり關係のない週期と、主として直徑の大きさに支配されて軸の方向には大した關係のない週期とに分けて考へ、假に前者を軸振動、後者を放射狀振動の週期と名付けた。

2. 軸の長さが直徑に比して充分小さければ、放射狀振動の週期は (38) 或は (38)' 式、軸振動の週期は (39) 式で與へられる。後者は従來 (1) 式で間に合せられて居たものである。

3. 軸振動は第四圖に示す様な姿態のものである。

4. 従來 Curie 氏式切方の水晶振動子に於ては、三つの著しい振動週期がある事はよく知られて居たが、その内、中間に位する週期の振動が如何なる性質のものであるかは明でなかつたが此振動は上記の放射狀振動に該當するものである事は最早疑を容れる餘地がなくなつた。又磁歪振動子に於ては軸の方向の寸法が直徑に比して短いものに就てはあまり多く實驗されて居ない様で、筆者の知る限りでは未だ放射狀振動の週期に着目した論文は發表されて居ないが、必ず實驗的に求め得べきものである事は斷言して差支ない。筆者は進んで此等の實驗に着手すると共に、本文中で保留した二三の問題に就ても解決を急いで居る。終に諸計算等に助力せられた理學士河合紀雄君の勞を謝する。

8. 引 用 文 獻

1. F.R. Lack: Observations on Modes of Vibration and Temperature Coefficients of Quartz Crystal Plates—L.R.E. 17 (1929), July p. 1123—1141; B.S.T.J. 8 (1929), July, p. 515—535; 本會雜誌學界時報昭和五年一月 p. 32.
2. Lord Rayleigh: The Theory of Sound. Vol. 1. Chapter VII. Longitudinal and Torsional Vibrations of Bars. p. 242—254.
3. A.E.H. Love: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 4th Ed. Chapter XII. Vibrations of Spheres and Cylinders, p. 289—290; Chapter XX. Vibrations of Rods. Problems of Dynamical Resistance p. 428.
4. H. Lamb: On Waves in an Elastic Plate—Proc. Roy. Soc. London. 93 (1917), No. A 648 March 1, p. 114—128.

9. 附 録

L ε/k と ε/l 及 1/k と 1/εl との關係

此處では Lamb 氏の論法を繰返して徒に紙数を費す事を避け、吾々に必要な部分だけを特に問題にする。Lamb 氏は $\lambda = \infty$ の場合*と $\lambda = \mu$ の場合とに就て別々に論じて居るが、一般に

$$\lambda = s\mu \dots\dots\dots(51)$$

としてやつて行ける。後に多少必要を生ずるので此一般の場合に就て、途中の手数を略し主な結果だけ挙げると、先づ

$$\beta = m\alpha \text{ 或は } \beta = i n\alpha \dots\dots\dots(52)$$

* 同氏文中 (26) 式の前行に $\epsilon < k$ とあるのは $\epsilon > k$ の誤である。

と置く事によつて (30) 式は次の如く變形出来る。

$$\frac{\tanh n\omega}{\tanh \omega} = \frac{4n(s+1)(s+2-m^2)}{(s+2+mn^2)^2} \text{ 或は } \frac{\tan n\omega}{\tan \omega} = \frac{4n(s+1)(s+2+n^2)}{(s+2-mn^2)^2} \dots (53)$$

又 $\frac{\xi^2}{k^2} = \frac{s+2-m^2}{(s+2)(1-m^2)}$ 或は $\frac{\xi^2}{k^2} = \frac{s+2+n^2}{(s+2)(1+n^2)}$ (54)

$$\xi^2 \omega = \frac{s+2-m^2}{s+1} \omega^2 \text{ 或は } \xi^2 \omega = \frac{s+2+n^2}{s+1} \omega^2 \dots (55)$$

但し $\omega = \alpha l$ (56)

である。(53) 式を満足する ω は n の増加に伴ひ次第に減少し

$$n = \frac{1}{s} \sqrt{(s+2)(3s+2)} \dots (57)$$

に至つて遂に零となる。この時 $\xi l = 0$ である事は勿論で、又 ξ/k の方は

$$\frac{\xi^2}{k^2} = \frac{s+2}{4(s+1)} = \frac{1}{2}(1-\sigma) \dots (58)$$

と云ふ簡単な形で表される所の極限値に達する。

今 ξ/k と ξl との關係を表す曲線を描けば次の様な極めて大切な性質がある。それは $s+2=mn^2$ を満足する様な n の値に對しては

$$\omega = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{s}{s+2}} \dots (59)$$

となるから

$$\xi l = \frac{\pi}{2}, \xi/k = \sqrt{1/2} \dots (60)$$

となる事である。即ち ξ/k と ξl との關係を表す曲線は、 s 従つて σ の値の如何に係らず (60) の點を通過する。又 (53) (54) (55) から夫々

$$\left. \begin{aligned} & \left(\omega + n \frac{d\omega}{dn} \right) \operatorname{cosec}^2 n\omega \cdot \tanh \omega - \frac{d\omega}{dn} \operatorname{sech}^2 \omega \cdot \cot n\omega \\ & = \frac{(s+2-mn^2)\{sn^4 + 3(s+1)(s+2)m^2 + (s+2)^2\}}{4n^2(s+1)(s+2+mn^2)^2} \\ & \frac{\xi}{k} \frac{d(\xi/k)}{dn} = -\frac{n(s+1)}{(1+n^2)^2(s+2)} \\ & (\xi l) \frac{d(\xi l)}{dn} = \frac{\omega}{s+1} \left\{ n\omega + (s+2+n^2) \frac{d\omega}{dn} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (61)$$

となるから (60) の點では

$$\frac{d\omega}{dn} = -\frac{\omega}{n} = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{s}{s+2}} \dots (62)$$

で、従つて

$$\left[\frac{d(\xi/k)}{d(\xi l)} \right]_{l=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \dots (63)$$

を得る。即ち色々な m に就て描いた曲線は、總てこの點で相切する譯である†。

第一表乃至第三表は $\lambda = \infty, \lambda = 2\mu, \lambda = \mu$ の三つの場合に對し $\omega, El, E/k$ の値を示したものである。この中 $\lambda = \infty$ 及 $\lambda = \mu$ の場合の ω の値は Lamb 氏の論文中に算出してある。

$$\lambda = 2\mu \text{ の場合には } m < 0.408, 1.89, 2.2 \dots\dots\dots (64)$$

と云ふ條件を得る事は同氏論文を一通り讀めば自らわかる。

第五圖(甲)及(乙)は E/k と El との關係及これから得らるゝ $1/El$ と $1/E/k$ との關係を圖示したもので、圖から直にわかる様に、總ての曲線は殆ど同じ位置に集つて居るから、極く大體の話をする場合には、この曲線の中の何れかで全體を代表せしめても差支ない。

尙昔々の計算は總て(30)式の第一の根のみに就て行つたのであるが、第二以下の根は、實際問題としてあまり重要でないので、殆ど略し、僅に後に附録 III の如き特殊の場合に於てのみ言及するに止めた。

第一 表 $\lambda = \infty$

$\omega = El$	E/k	$\omega = El$	E/k	$\omega = El$	E/k	$\omega = El$	E/k
∞	1.047	4.14	1.005	2.881	0.857	0.967	0.581
8.67	1.045	4.08	1.001	2.108	0.819	0.798	0.555
7.09	1.042	4.00	1	1.912	0.781	0.594	0.530
6.38	1.039	3.872	0.995	1.732	0.743	0.292	0.507
5.93	1.036	3.570	0.981	$\frac{1}{2}\pi$	$1/\sqrt{2}$	0.241	0.505
5.61	1.033	3.218	0.968	1.417	0.673	0.175	0.503
4.75	1.021	2.883	0.928	1.269	0.640	0.081	0.500
4.35	1.011	2.587	0.894	1.121	0.610	0.	1/2

第二 表 $\lambda = 2\mu$

m	n	ω	El	E/k	m	n	ω	El	E/k
0.4082		∞	∞	1.0724		0.8	1.745	2.170	0.8410
0.40		6.349	7.183	$\sqrt{7/5}$		1.0	1.497	1.933	$\sqrt{5/3}$
0.35		4.259	4.842	1.0511		1.2	1.293	1.741	0.7466
0.30		3.705	4.230	1.0364		$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{1/2}$
0.25		3.411	3.908	$\sqrt{21/20}$		1.6	0.973	1.439	0.6787
0.20		3.231	3.712	$\sqrt{33/32}$		1.8	0.841	1.307	$\sqrt{2/5}$
0.15		3.114	3.588	1.0088		2.0	0.718	1.173	0.6325
0.10		3.040	3.500	1.0038		2.2	0.599	1.023	0.6152
0.0	0.0	2.985	3.447	1.		2.4	0.477	0.860	0.6008
	0.1	2.938	3.391	0.9809		2.6	0.388	0.640	0.5888
	0.2	2.798	3.247	0.9855		2.7	0.250	0.485	0.5835
	0.4	2.419	2.849	0.9469		2.8	0.116	0.230	0.5787
	0.6	2.061	2.473	0.8953		$2\sqrt{2}$	0.	0.	$\sqrt{1/3}$

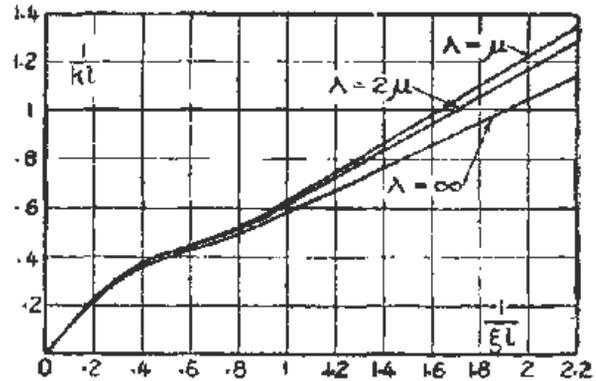
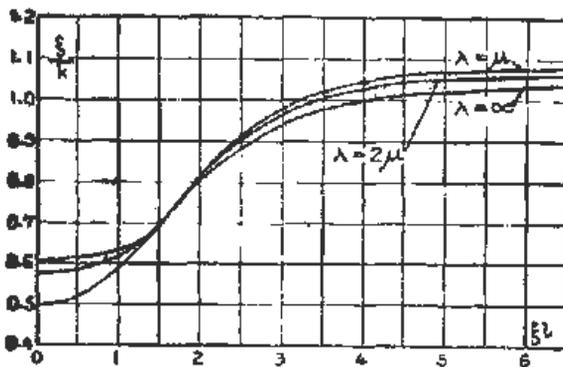
† Lamb 氏は此性質には何等言及して居ない。

第 三 表 $\lambda = \mu$

ω	EI	E/k	ω	EI	E/k	ω	EI	E/k
∞	∞	1.088	2.506	3.090	0.087	0.778	1.456	$\sqrt{7/15}$
5.230	6.150	1.081	2.214	2.783	0.953	0.696	1.378	0.689
3.607	4.537	1.062	1.911	2.477	0.907	0.620	1.298	0.657
3.343	4.010	1.048	1.849	2.225	0.860	0.551	1.217	0.647
3.085	3.721	1.032	1.432	2.025	$\sqrt{2/3}$	0.486	1.132	0.639
2.918	3.536	1.022	1.253	1.867	0.779	0.422	1.034	$\sqrt{4/10}$
2.805	3.412	1.014	1.105	1.740	0.747	0.359	0.924	0.627
2.727	3.327	1.008	0.979	1.632	0.722	0.292	0.788	0.620
2.878	3.274	1.008				0.216	0.610	0.617
2.640	3.233	1	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$	$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{1/2}$	0.109	0.322	0.614
2.604	3.195	0.997	0.872	1.540	0.700	0.	0.	$\sqrt{3/8}$

第 五 圖 甲

第 五 圖 乙



II. $\frac{d^2 J_0(\xi a)}{d(\xi a)^2} + \frac{\xi^2 + \beta}{2\xi^2} J_0(\xi a) = 0$ の根と $\frac{d^2 J_0(\xi a)}{d(\xi a)^2} = 0$ の根との比較

今一例として $s=2$ の場合に就て比較して見る爲、附録 I に於けると同様 $\beta = m\alpha$ 或は $\beta = in\alpha$ と置けば、(32) 式は次の如く變形する事が出来る。

$$(\xi a) \frac{J_0(\xi a)}{J_1(\xi a)} = \frac{4 - m^2}{2(1 - m^2)} \quad \text{或は} \quad (\xi a) \frac{J_0(\xi a)}{J_1(\xi a)} = \frac{4 + n^2}{2(1 + n^2)} \dots\dots\dots(65)$$

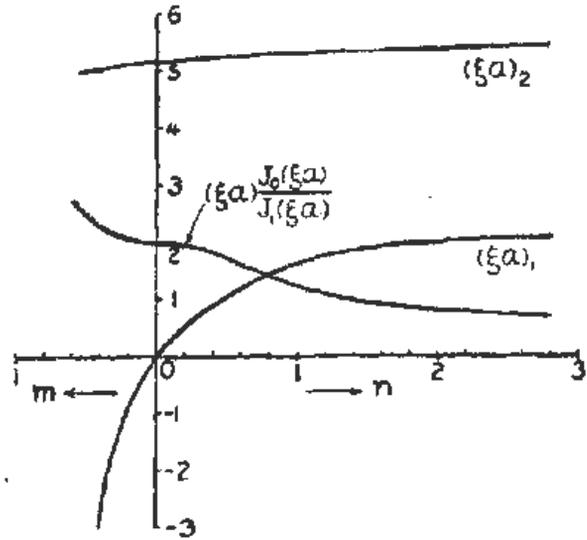
而して m は 0.40819 から 0 迄、 n は 0 から $2\sqrt{2}$ 迄の間を考へればよい。この範囲内に於ける上式の根は第四表及第六圖に示す様になる。而して第一表乃至第三表及第一圖等からもわかる様に m の部分は吾々にはあまり入用でない。又第六圖でよくわかる様に n が零に近い部分では $(\xi a)_1$ の値は可成り著しく變化するから、此場合だけ第四表から忠實に計算した値を用ひて第一圖及第二圖を描いた。然しこの部分とても幸にして吾々にとつては大して必要のない部分である。第二根以下は m, n の如何に係らず殆ど一定で、(30) 式の根 ((65) 式で云へば $n = \sqrt{2}$ に當つて居る) の前後に跨つて居る。

第六圖は $s=2$ に就ての結果であるが s の如何なる値の場合にも、 (ξa) の根はこの圖の曲線

第四表 (65) 式の根

n	$(\xi a) \frac{J_0(\xi a)}{J_1(\xi a)}$	$(\xi a)_1$	$(\xi a)_2$
0.	2.	0.	5.14
0.1	1.9853	0.25	—
0.2	1.9428	0.48	—
0.4	52/29	0.90	5.18
0.6	1.6029	1.22	—
0.8	1.4146	1.46	—
1.0	5/4	1.63	5.28
1.2	1.1147	1.75	—
$\sqrt{2}$	1.	1.84	5.34
1.6	0.92135	1.90	—
1.8	0.85377	1.95	—
2.0	4/5	1.98	5.37
2.2	0.75685	2.01	—
2.4	0.72180	2.04	—
2.6	0.69330	2.05	—
2.7	0.68094	2.06	—
2.8	0.66969	2.07	—
$2\sqrt{2}$	2/3	2.07	5.40
$m=0.4$		-3.00	5.04

第六圖



に極めて接近した値となる。

如何なる理由で (82) 式の代用として (36) の如きものを採つたかは、一見藪から棒の感があるが、第六節に於て振動状態を論ずる際に附録 III 中で得られる条件 (70) と対照すれば、筆者の意のある所は自ら首肯し得られる事と思ふ。

III. $E^2/L^2=1/2$ の場合に於ける變位

此特別な場合には、(18) 式は $k^2=2E^2$

$\beta^2=-E^2$ となるから (17) 式は次の様に表示得る。

$$2\psi = iB \frac{\partial J_0(\xi r)}{\partial r} \sin \xi z \cdot e^{i\omega t} \dots\dots\dots (66)$$

従つて (21) (22) 兩式は次の様になる。

$$u = -\frac{\partial J_n(\xi r)}{\partial r} e^{i\omega t} \left\{ A \frac{1}{k^2} \cosh \alpha z + iB \frac{1}{2\xi} \cos \xi z \right\} \dots\dots\dots (67)$$

$$w = -J_0(\xi r) e^{i\omega t} \left\{ A \frac{\alpha}{k^2} \sinh \alpha z + iB \frac{1}{2} \sin \xi z \right\} \dots\dots\dots (68)$$

環境条件として (23) 乃至 (26) を適用するに、先づ (23) の条件を満足する爲には $A=0$ であると同時に

$$\xi l = \frac{\pi}{2} (2q+1) \dots\dots\dots (69)$$

である事を要する。又 (25) 式を満足せしむるには

$$\frac{dJ_1(\xi a)}{d(\xi a)} = 0 \dots\dots\dots (70)$$

の条件を必要とする。これは (36) と同じ条件ではあるが、(36) を得る場合の如く近似的の条件として得られたものではない。此等の結果 (24) 及 (28) の兩条件は圓錐の表面ばかりでなく、錐ての點に於て自然に成立する事になる。即ち此場合には、 z 及 r 軸に關する迂りの至は體內錐ての點に於て無い譯である。先の (60) の条件は (69) に於ける $q=0$ の場合に當る。

本文の (41) (42) 兩式は上述の条件を入れ $iB=2C$ と書き直したものである。

(昭和五年九月十日受付)