

薄板状水晶振動子の振動

(特に R₁ 板の近接波について)

正員 古賀 造 正員 福 与 人 八
(東京大学工学部) (東京大学工学部)

電気通信學會誌(昭28-2)

1. 緒 言

水晶振動子が高周波工学上に应用される事が紹介されて間もなく、薄板状振動子が登場し、その意味に對比する周波数の振動が非常に利用される様になつたが、一面該々この振動に近接した周波数の幾つかの振動がある事が認められ、振動子を共振子として使用するにも、発振子として使用するにも、不便が少なくなつた。実用上の見地からは斯様な所謂「近接波」を除き単一の振動だけしかない様に出ないものであろうかと言ふ疑問が起つた事は言う迄もなく、これが為種々な技巧を加える試みが提案されたが、何れも大した成功をおさめる事が出来なかつた。

筆者等はこの問題を解決するには、先ず以て所謂近接波がどんな素性のものであるかを究める必要があるとの見解から、種々心を砕いて居たが、最近佐野の一人(福与)が創案した探針法とも云ふべき、振動に伴なう歪に起因する電気偏極の分布の観測に成功したのが契機となつて、振動の現象が徹底的に明瞭になつた。本報告はその要点を現存最もよく実用されて居る振動子である所 R₁ 板について報告せんとするものである。周知の通り、この種の問題に對しては既に数人の著者^{*)}が相当詳細に論じて居る所であり、且勿論夫々特色はあるが、何れも未だ全貌を把握し得て居ない筈がある。

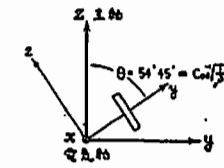
2. 薄板状振動子の意味振動と 輪廓寸法との關係

先ず話の順序として、輪廓の寸法が無限に大きい板状子について既に報告した結果の要点を簡単に述べ、

^{*)}Vibration of Thin Piezoelectric Quartz Plate (Especially on R₁-Cut Rectangular Plate). [論文番号 2495]

本論に導入して行きたい。

今振動子 R₁ 板の板面への法線方向を y 軸, diagonal axis の方向を z 軸にとると(第1圖参照)、板面の寸法が z 及び y 方向に ∞ である場合には、板の振動は y 方向に往復する平面波に基づく定在波に外ならない。従つて幾て幾の量か z 方向及び y 方向に変化がないとの条件を運動の方程式に入れると、三種の平面波が得られるが、この中圧倒的に振振し得るもののみをとり、且 y=0 及び y=y₀ の両面に於いて歪がないと云う条件を入れると、次の關係を得る。



第 1 圖

$$\omega y_{01} / \rho_1 c_{66} = g n \quad (g: \text{正整数}) \quad (1)$$

$$u = A \cos(g n y / y_0) e^{i p t} \quad (2)$$

但し、θ は角周波数、ρ は密度、c₆₆ は弾性定数、u は z 方向の変位

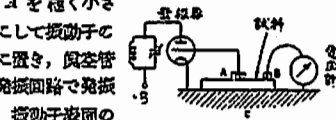
以上の結果は、發現の形式こそ多少異なつて居るが既に既々報告した所である(附録 I に於ける c₆₆ と c₄₄ との關係参照)

z 方向の寸法及び y 方向の寸法が ∞ であれば上述の振動(圧倒的に振振し得る歪の振動は只一種、振振し得ない歪の振動がその外に 2 種)以外の振動は全くあり得ない。然るに實際の振動子^{**)}に於いては(1)式で与えられる周波数に近い振動波の振動が沢山ある。して見ればこれ等の振動は、z 方向の寸法及び y 方向の寸法が有限である事に起因して居る事は疑ない。然

^{**)}こゝでは勿論充分注意深く仕上げた型子を対象として居る。仕上げが不充分な爲の影響については附録 II に記述した。

しこれ等の振動がどの様な素性の、又寸法とどんな關係の振動波であるかについては、未だ必ずしも充分判然たるものがない。

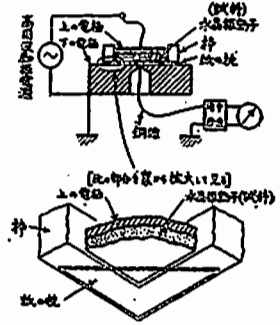
一体振動子の振動素性は、板面の寸法が有限である為に、振動波及び振動素性が(1)(2)兩式の示す所のものからどの様に異つたものになるか。そしてそれはどんな方法で探ればよいかと非常に苦心したが、一つの試みとして第 2 圖に示す様に、振動子に配する電極の片方 A を極く小さい面積にして振動子の略中央に置き、真空管による発振回路で共振せしめ、振動子表面の残りの部分に他の電極 B を移動し、これに勝越する電圧を調べて見る事とした。この実験から發見して間もなく著者の一人(福与)が次の如き配置を創案し、この結果從來全然企圖し得なかつた、振動子の内部に於ける歪の分布を観測する事が出来、本問題の研究が飛躍的に進歩した。そこで順序として先ずこの観測方法及び観測の結果につき説明し、その上で理論的考察を進めたい。



第 2 圖

3. 探針法による振動子の偏極分布の観測

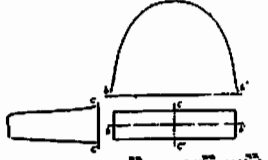
筆者の一人(福与)が工夫した方法と云ふのは、即ち第 2 圖に於ける電極 A が電極 B に触れないで、而も垂直上振動子の全面を覆う様にした形式のもので、第 5 圖の如く發振を平面に仕上げた広い電極に小孔を明け、この孔に二重絹巻管線(直径約 0.5mm)を挿込み、これを探針として用いる。そしてこの探針に對向する振動子部分を歪化するには、振動子の方を移動する事とし、振動子は絶縁物製の枠の四隅に貼つた極く狭い三角形の薄い紙の枕の上に置き、振動子の上に



第 3 圖

置せた他方の電極(第 2 圖の B に相當する電極)と一緒に動かせる事とした。この様な配置にした主な理由は、下の電極と振動子とが接触して居ると、振動子に對向する探針の位置を移動する場合に、接触状態が変化して結果が誤謬なるのを防ぐ為である。斯様にして探針には、これに對向する極だけの偏極に該當する電圧が得られる訳である。この電圧を観測するには、真空管で増巾した上検査した。

この様な配置で先ず観測装置の動作を確認する意味で、振動素性に疑間のない振動についての観測を行つた。即ち矩形 X 板で板面の一边が充分長く且つ水晶の主軸に平行で、他の辺が充分長いものについて、最も低い周波数の振動即ち板面の長辺の方向の縱振動を観察して見た所、第 4 圖の如く、長辺の方向に略正弦波形、短辺の方向には殆んど一様な偏極の分布になり、予想通りであつた。

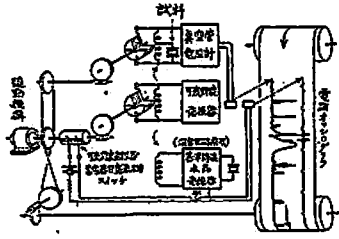


第 4 圖

さて然らば薄板状振動子の振動に於いてはどんな偏極分布になるかを観察して見た所、後に第 8 圖第 10 圖等で示す様に、振動の素性が非常に整然として居り、従つてこれを検討する事により、振動素性と振動波との關係も非常に明瞭になつた。然し本稿ではその経過を忠実に報告するよりも、寧ろ結局の所望し得た理論的説明と探針法による実験的結果とを對照し乍ら話を進める事としたい。

4. 共振周波数の測定

振動子の共振周波数は非常に沢山ある上に、どの程度に顯著なものを選び上げて論ずべきかと云ふ点の判断が中々大層なもので、結局次の様な方法によつた。即ち會て水晶周波計について報告した方法を利用し、第 5 圖に示す様に可変周波共振器で周波数を徐々に而も適度的に変化し、一方この発振器の周波数に常に同調させた電気振動回路を設け、これに試料たる水晶振動子を適度に結合させて置くと、水晶振動子の共振に伴ない電気振動回路の電圧が低下する。この電圧を真空管電圧計に入れ、その出力を電磁オシログラフで自動的に記録させた。この際共振の起つた周波数



第 5 図

を記録紙の上で精密に決定し得る様、別に設けた基準周波水晶発振器を混合管として兼用し、その出力をオシログラフの他の振動素子に入れて基準周波数の位置を表示すると共に、可変周波発振器の容量を容量を变化する線子歯車が一回転する毎に、やはり標識が現われる標にした。附録IIの第16図、第17図はその記録例である(これ等写真記録は印刷が不鮮明なるのを恐れ敢て写した回を掲げる事とした)。云々迄もなく、共振子の振動に伴う、板面に垂直な方向の電気偏極(の表面積分)が大きい場合電気偏極回路との結合が密であるから、共振の谷が深く且広がる。従つて前述の方法で観察した顕著なものと程實際上にも互に視すべきものである。

5. 厚味振動(其の1)

先ず運動の方程式(一般式)

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ etc.}$$

を水晶の場合につき第1図に示した座標軸に關し書き直すと、

$$\left. \begin{aligned} L_1 u + H_0 v + G_0 w &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ H_0 u + M_0 v + F_0 w &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ G_0 u + F_0 v + N_0 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (3)$$

但し

$$\begin{aligned} L_0 &= c_{11} D_x^2 + c_{66} D_y^2 + c_{55} D_z^2 + 2c_{56} D_x D_z \\ M_0 &= c_{66} D_x^2 + c_{22} D_y^2 + c_{44} D_z^2 + 2c_{24} D_y D_z \\ N_0 &= c_{55} D_x^2 + c_{44} D_y^2 + c_{22} D_z^2 + 2c_{24} D_y D_z \\ F_0 &= c_{66} D_x^2 + c_{24} D_y^2 + c_{44} D_z^2 + (c_{24} + c_{46}) D_x D_z \\ G_0 &= (c_{12} + c_{13}) D_x D_y + (c_{13} + c_{23}) D_x D_z \\ H_0 &= (c_{14} + c_{46}) D_x D_y + (c_{12} + c_{66}) D_x D_z \\ D_x, D_y, D_z &\text{は夫々 } x, y, z \text{ 方向の偏微分 } \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z \text{ を表す。} \end{aligned}$$

前述した様(第1図参照) y 軸の方向を R₁ 板の板面への法線に一致せしめた場合には、附録IIの末尾に

示す様に $c_{11}, c_{22}, c_{44}, c_{55}$ の四つの弾性定数は他の定数に比して相当小さい。そこでこれ等を一切無視し又変位 u の y に関する函数形式は x 方向及び z 方向の寸法が ∞ である時と異ならないと見て差支ない事、及び探針法による x 方向及び z 方向の偏極の分布を参考として、試みに次の如き解を与えて見た。

$$\left. \begin{aligned} u &= A \sin \alpha x \cdot \cos \beta y \cdot \cos \gamma z \cdot e^{j\omega t} \\ v &= B \cos \alpha x \cdot \sin \beta y \cdot \cos \gamma z \cdot e^{j\omega t} \\ w &= C \cos \alpha x \cdot \cos \beta y \cdot \sin \gamma z \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} (4)$$

そして、 $z=0$ & x_0 , $y=0$ & y_0 , $z=0$ & z_0 の 8 面が張力を受けないと云ふ必要条件から、次の関係を得る。

$$\alpha x_0 = p\pi, \beta y_0 = q\pi, \gamma z_0 = r\pi \quad (5)$$

但し p, q, r は正整数

又(4)(5)を(3)に入れて A, B, C を消去すると、

$$\begin{vmatrix} L - \omega^2 \rho & H & G \\ H & M - \omega^2 \rho & F \\ G & F & N - \omega^2 \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

但し

$$\begin{aligned} L &= c_{11}\alpha^2 + c_{66}\beta^2 + c_{55}\gamma^2, & F &= (c_{24} + c_{46})\beta\gamma, \\ M &= c_{66}\alpha^2 + c_{22}\beta^2 + c_{44}\gamma^2, & G &= (c_{13} + c_{35})\gamma\alpha, \\ N &= c_{55}\alpha^2 + c_{44}\beta^2 + c_{22}\gamma^2, & H &= (c_{12} + c_{66})\alpha\beta, \\ \alpha &= p\pi/x_0, & \beta &= q\pi/y_0, & \gamma &= r\pi/z_0 \end{aligned}$$

u, v, w の振巾 A, B, C の比は(4)(5)を(3)に入れた結果に(6)から得た ω の値を入れて求める事が出来る。(6)を満足する ω 即ち振動数は与えられた寸法 x_0, y_0, z_0 に対し、無数に多くあるが、取項にも述べた様に、吾々は特に y_0 が x_0 及び z_0 に比し充分小さい場合に於いて、(1)式で与えられる周波数からあまり遠くない周波数の振動を主として考える。

(1)式で与える周波数は(6)に於いて $x_0 \rightarrow \infty$, $z_0 \rightarrow \infty$ の場合に該当する事は云々でもない。
 x_0, z_0 が有限である場合にも、 α, γ は β に比し非常に小さいので、 F, G, H は L, M, N に比し非常に小さい。従つて(1)式に該当する角周波数は $\omega^2 \rho = L$ で与えられる。或は周波数を ν ($=\omega/2\pi$) で表わせば、

$$(2f)^2 \rho = c_{11}(p/x_0)^2 + c_{66}(q/y_0)^2 + c_{55}(r/z_0)^2 \quad (7)$$

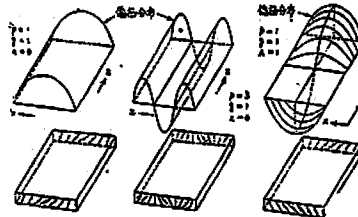
そしてこの場合 B, C は A に比し非常に小さい値となり、変位は事實上 u のみと考へてよい。即ち

*実はこの解では表面に於ける張力だけ零にならないが、一応この程度で甘んずる事とした。

$$u = A \sin(p\pi x/x_0) \cdot \cos(q\pi y/y_0) \cdot \cos(r\pi z/z_0) \cdot e^{j\omega t}$$

で、従つて板面に於ける電気偏極の分布状態は $\sin(p\pi x/z_0) \cdot \cos(r\pi z/z_0)$ で与えられる。

第6図はこの模様を p, q, r の二、三の場合につき



第 6 図

図示したものである。図にも示した様に、この振動の特徴は振動子の外形が変形しない事である*(表面にも変位はあるが)。

第7図中に示す点は x_0, y_0 の寸法を一定に保ち、 z_0 の寸法を少しずつ減しながら測った共振周波数の一部を示す。これに対し(7)式から計算した結果を実験で示した。曲線に附記した例えば(3,1,0)と云う記号は $p=3, q=1, r=0$ に該当する周波数である事を意味して居る。これ等共振周波数の中(1,1,0)が実はこの振動子に対しては只一つの共振周波数として期待されて居た所のものである。以下これを便宜上「主振動」と呼ぶ事にする。(1,1,1)(1,1,2)の曲線に属して居る周波数の振動は非常に弱い共振ではあるが、主振動(1,1,0)に周波数が近いので、振動子の使用条件によっては必ずしも軽視し得ない關係上感々振動子を特に強めに振動して採り上げたものである。

第 7 図

又(7)式から計算した(3,1,0)の値(実験)は、探針法で(3,1,0)である事を確めた共振周波数より稍低い。この短りは後面に述べる一層精密な計算により除

*Bykoski & Terman(1) (恐らく単に Sykes の所説を紹介したものであるが)の示して居る振動素子の図は間違つて居る。

く事が出来る。

尙上述の振動以外にも複調ではあるが、(3,1,1)等々の種々な振動がある。そしてこれ等の場合に於ける偏極分布や振動数は全く同じ様に説明出来る。然しこれ等の詳細については一応省略する事とした。

第8図は図中に記入した共振周波数で振動した場合の探針法による振動子板面の中心線上に於ける電気偏極の分布を示すもので、巨視的には第6図と同じ形になつて居る。この観測の際(3,1,0)等の場合に、相隣る山形の部分の極性が反対になつて居る事は、励振電源と探針に現われる電圧との位相關係を確める事により比較的容易に判断出来た。そしてこの際 p の奇数の場合しか振動し得ない事をも有力に物語つて居る。即ち p が偶数の時には正負の部分同士になるから、振動子に向する電極に対して与える静電誘導は該可なくなる。換言すれば圧電的に振動出来ない。然し p が奇数であつても、振動子の表面は正負差引き $1/p$ の面積の分しか、電極を通じて外部回路とは有効に結合しない關係になるから、共振は p が大きくなる程微弱である。 r が0以外の整数の場合、共振が常に微弱であるのも同じ理由による。

尙第8図の偏極分布には、前述した波形の上に、波長の短い、振巾の小さい波が重畳して居るが、その正体については後に論ずる。

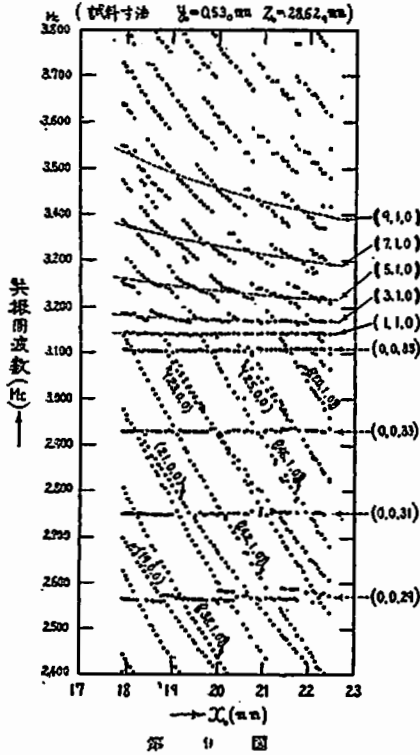
6. 高次論調振動(其の1)

前節では主振動より高い周波数領域のみについて述べたが、主振動より低い周波数領域でも種々な共振周波数がある。そしてその振動は次の3種類に分類する事が出来る。

- (1) 共振周波数が板面の一辺 x_0 のみに關係し、他の寸法 y_0 及び z_0 に無關係な振動
- (2) 共振周波数が x_0 のみに關係し、他の寸法 z_0 及び y_0 に無關係な振動

(8) 共振周波数が α_0 と β_0 との関係し、 α_0 に無関係な振動

第0図は α_0 だけ少しづつ減らし、その程度調べた



共振周波数を示すものであるが(但し節節で述べた(1,1,1)等の如き弱い共振は略した)、この図中主振動(1,1,0)より低い周波数領域で(21,0,0)(19,0,0)等と附記したものは前述の(1)類に属し、(0,0,33)(0,0,31)等と附記したものは前述の(2)類に属し、((4,1,0))の如く附記したものは前述の(3)類に属する。この事は探針法により、寸法の異なる他の数個の試料についても調べた結果と対照して確かめる事が出来た。

第(1)類に属する振動は云々迄もなく(8)式に於ける $\partial/\partial y=0, \partial/\partial z=0$ である事を意味する。従つて $L_0=c_{11}D_x^2, M_0=c_{66}D_x^2, N_0=c_{33}D_x^2, F_0=c_{12}D_x^2, G_0=0, H_0=0$

となる。そこで總ての変位が $e^{i(\omega t - \alpha x)}$ の形で表わされるとき、且 $x=0 & \alpha_0$ で変力が弱く居ないと云う条件を適用すると、既に報告した厚板振動の理論⁽²⁾と全

く同じやり方で、次の結果が得られる。

$$(u, v, w) = (A, B, C) \cos(p\pi x/\alpha_0) e^{i\omega t} \quad (8)$$

$$\text{但し } \omega^2 \rho = c(p\pi/\alpha_0)^2 \quad (9)$$

で、(8)の第1式に対しては $c=c_{11}$ 、又第2及び第3式に対するものは次の二次方程式の根である。

$$(c_2 - c)(c_1 - c) - c_3^2 = 0$$

即ち $c=29.03$ 及び 67.19 (単位 10^{10} dynes/cm²) で前者は $c_{11}(=29.25)$ に、後者は $c_{33}(=66.97)$ に非常に近い。これは C_{22} が非常に小さい事に基づく。そして又これが前者に対しては(8)式の C は殆んど0で、後者に対しては B が殆んど0になる事も直ちに分かる。

第0図中に (21, 0, 0)(19, 0, 0)等と附記したものは(8)の第3式で与えられた振動である。即ち例えば $\alpha_0=17.91$ mm の時共振周波数 $f=2697$ kc であり $p=19$ である事が探針法で確かになつて居るので(第10図参照)(9)式にこれ等の値を入れると $c=68.8_3 \times 10^{10}$ dynes/cm² となり、上述の最後の根に非常に近い。即ちこの振動は(8)の第3式で表わされる振動である事が分かる。

第(2)類に属する振動は前述の第(1)類に属する振動と全く同じ方針で取扱ふ事が出来る。即ち今度は(8)に $\partial/\partial z=0, \partial/\partial y=0$ を用いる事から出発し、変位及び周波数は次式で与えられる。

$$(u, v, w) = (A, B, C) \cos(p\pi x/\alpha_0) \cdot e^{i\omega t} \quad (10)$$

$$\text{但し } \omega^2 \rho = c(r\pi/\alpha_0)^2 \quad (11)$$

そして(10)の第1式に対しては $c=c_{22}=66.97 \times 10^{10}$ dynes/cm² である。

第0図中に (0, 0, 33)(0, 0, 31)等と附記したものは(10)の第1式で与えられる振動である。即ち例えば ($\alpha_0=19.5_2$ mm の時) 共振周波数 $f=2928$ kc、 $r=33$ であるから、(11)式に必要な値を入れると $c=68.3_7 \times 10^{10}$ dynes/cm² となり、上述の c_{22} に非常に近い。即ちこの振動は(10)の第1式で与えられる振動である事が分かる。

以上第(1)類、第(2)類何れの振動に於いても、奇数次の振動だけしか実験的には現れない理由は、前節で考えたときと同じ理由による。

第0図の実験結果には、主振動より低い周波数領域で、更に一帯の共振周波数が現れて居る。これは前述の第(3)類の振動である。又主振動より相当高い周波数領域では、相当複雑した数列を示して居る。これ等に関しては次節以降に論ずる。

7. 厚板振動 (其の2)

第5節の(7)式で与える周波数に於いて p が大き

くなるに従い実験値との距りが目について来る事は前述の通りであるが、その原因は第5節でのやり方が板面に於ける境界条件として $y=0 & y_0$ の両板面に於ける $T_y=0$ の条件が満足されて居ないのを見逃つた為であろうと考え、この点を改定した所、非常に好結果を得た。そのやり方としては、 $r=0$ の場合について考えれば充分である関係上、最初から總ての z の方向の偏微分及び w は0であるとして出発した。尚 c_{11}, c_{22}, c_{33} 等を無視した事はこの場合も同様である。

今運動方程式(8)の始めの3式から w を消去すれば $[(L_x - \rho \partial^2/\partial t^2)(M_y - \rho \partial^2/\partial t^2) - H_z^2]u = 0 \quad (12)$

今この弾性体内を成角周波数 ω の弾性波が成伝播定数 α で x 方向に進行して居ると仮定する。即ち $u = e^{i(\omega t - \alpha x)}$ とし、これを(12)に入れると、 $\partial^2 u/\partial x^2$ に關する二次方程式が得られる。そこで更に $u = e^{i\beta y}$ と置けば、次の如き方程式が得られる。

$$(L - \omega^2 \rho)(M - \omega^2 \rho) - H^2 = 0 \quad (13)$$

$$\text{但し } L = c_{11}\alpha^2 + c_{66}\beta^2, \quad M = c_{44}\alpha^2 + c_{22}\beta^2, \quad H = (c_{12} + c_{66})\alpha\beta$$

この方程式で与える β^2 の値は二つある(第5節では一つであるとしたのに対し)。然し変位の性格は勿論(4)の示す所と殆んど異なる筈はないから、これ等の事を考慮して次の如き形で表す。

$$u = (A_1 \sin \beta_1 y + A_2 \sin \beta_2 y) e^{i(\omega t - \alpha x)} \quad (14)$$

但し x では板の中心面(neutral plane)を $y=0$ とした(第5節では板面の片方を $y=0$ 、他の面を $y=y_0$ としたのに対し)

(14)を(8)の第1式に用いれば σ が得られる。

$$\alpha(c_{12} + c_{66})v = j(J_1 A_1 \cos \beta_1 y + J_2 A_2 \cos \beta_2 y) e^{i(\omega t - \alpha x)} \quad (15)$$

但し J_1, J_2 は夫々 $(\omega^2 \rho - \alpha^2 c_{11} - \beta^2 c_{66})/\beta$ に於ける β を β_1 及び β_2 と置いた量である。

振動子の表面が自由である場合の振動に於いては、片ず板の両面 ($y = \pm y_0/2$ とする) で変力が0であると云う条件が満足されなければならない。

$$\left. \begin{aligned} X_y = c_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \\ Y_y = c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

即ち次の関係が成立しなければならぬ。

$$K(\beta_1) = K(\beta_2) \quad (17)$$

但し

$$K(\beta) = \frac{\omega^2 \rho - \alpha^2 (c_{11} - c_{12}(c_{11} + c_{66})/c_{12}) - \beta^2 c_{66}}{\omega^2 \rho - \alpha^2 c_{11} + \beta^2 c_{12}} \times \beta \tan \left(\frac{1}{2} \beta y_0 \right)$$

そして更にその上に $z=0 & \alpha_0$ の端面で変力が0である為の条件が満足されて居なければならない筈であるが、この方は第5節で考えた様に、近似的に

$$\alpha \alpha_0 = p\pi \quad (18)$$

で与えられる。

そこで結局共振周波数は α_0 と y_0 とが与えられた場合、 p の夫々の整数値(奇数)に対し(13)(17)(18)から β_1, β_2 を消去して得られる筈である。計算の結果は非常に高い近似で(7)式に於ける c_{11} の代りに $1.2 \times c_{11}$ とした場合の周波数に一致する事がわかつた。

第7図及び第9図に於いて主振動(1,1,0)より高い周波数領域で(4,1,0)の如き様式で附記した破線は計算値を示す。即ち $p=3$ の場合に於いては、計算値と実験値とは非常によく一致して居るが、 p が次第に大きくなるに従い、次第に実験点の配列と計算値を示す破線とは交叉した傾向になる。この事については第9節で問題にする。

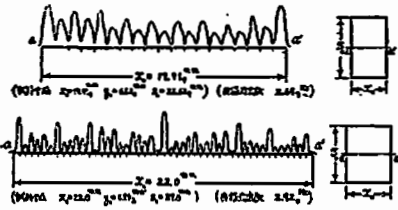
振動変位は、(4)に非常に近い事は当然の事であるから、中心面を $y=0$ とした今の場合次の様に示す事は多く説明を要しない。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sin(p\pi x/\alpha_0) (A_1 \sin \beta_1 y + A_2 \sin \beta_2 y) e^{i\omega t} \\ v &= \cos(p\pi x/\alpha_0) (B_1 \cos \beta_1 y + B_2 \cos \beta_2 y) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

この式に於ける A_1/A_2 は与えられた α_0, y_0 に対し(13)(17)(18)から求めた ω を(16)の何れか一方に入れたと決定される。然し x ではこれ等を具体的に計算する迄もないから省略し、第9図で示す事とした。

8. 高次輪廓振動 (其の2)

第9図を見ると、前節迄に考えた振動の外に、更にもう一類の振動が現れて居る。この振動は α_0 の減少に伴ない、 α_0 に反比例した値以上に高い周波数になるのが特に顕著な事と、も一つは探針法により縦変位の分布を調べると、 x 方向には、前述の他の幾つの場合と異なり、第11圖に示す例(相似の型により第9図に於ける $\alpha_0=21.1_2$ mm、 $f=3041$ kcに該当)の様に α_0 を偶数に分割した各点に偏極の極大点が現われて居る事である(x 方向には変化はない)。これ等の事を考慮して、前節同様板面で変力が0になる条件を



第 10 図 (上)
第 11 図 (下)

満足する他の解を求めた。

即ち前節に於いては、(18)(17)(18)から求めた振動の角周波数は β_1^2, β_2^2 を共に正 (即ち β_1, β_2 を共に実数ならしめる値であったが、この外に β_1^2 及び β_2^2 を共に負 (即ち β_1, β_2 を共に虚数) ならしめる値がある。この場合の取値計算は非常に複雑であるが、幸い第 9 図に示す寸法の範囲 ($1.5 > y_0/x_0/p > 1$) では、相当近い近似で次の関係に一致する事を知った。

$$(2f_0/p)^2 \rho = 23 \tanh(y_0/x_0/p) \quad (20)$$

但し単位は f を Mc, x_0, y_0 を mm, ρ を g/cm^2 で表わす。

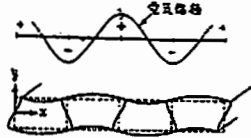
第 9 図中に例えば (48, 1, 0) の如く附記した実測点の列は上述の振動に於ける p の値が 41 に該当する事を示して居る。

振動変態は探針法による電気場極の分布が第 11 図の様になつて居る事から、端面の位置を $x=0$ & x_0 とした場合 $\partial u/\partial y \propto \cos(p\pi x/x_0)$ で表される事がわかる。従つて $u \propto \cos(p\pi x/x_0)$, $v \propto \sin(p\pi x/x_0)$ で、且端面に於いては、 $Y_0=0$ 即ち $e_{11}\partial u/\partial x + e_{12}\partial v/\partial y = 0$ を満足する事よりも、 $X_0=0$ 即ち $e_{11}\partial u/\partial x + e_{12}\partial v/\partial y = 0$ を満足する事の方が支配的な要件となつて居る。換言すれば、 u, v は次の如き形式で示される。

$$\left. \begin{aligned} u &= \cos(p\pi x/x_0) \left[A_1 \sinh \beta_1 y + A_2 \sinh \beta_2 y \right] e^{j\omega t} \\ v &= \sin(p\pi x/x_0) \left[B_1 \cosh \beta_1 y + B_2 \cosh \beta_2 y \right] e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

これを $p=4$ の場合について図示したのが第 12 図である。

探針に現われて居る結果から見ると、振動子の端面に於ける電気場極は、振動子に垂直な電極に対し充分



第 12 図

な静電場等を与え得ない様に思われる。これが p が偶数の時電極に懸結する電荷は、正負交互に $p-1$ 回即ち奇数回現われ、結局外部電気回路との結合が可能一換言すれば共振可能になつて居ると思われ。

斯様な関係で、この場合には他の場合と異なり、 p の奇数値に対する共振の方が却つて現われて居ない。米田 (1934) で flexural vibration と名付けて居る振動は、以上述べた高次陰極振動に該当して居るが、振動変態が単純な推測に止つて居るので、第 12 図とは大分趣を異にした姿態が示してある (文献 (1) Chapter IV, p. 228 & 225 参照) ばかりでなく、 p の奇数に該当する振動数も実測値として掲げてあるが、実際には奇数次の共振は偶数次の共振に比較すると、専ら上とるに足らない位弱い。

9. 厚味振動と高次陰極振動との結合

第 13 図は第 9 図の一部を抜き書きしたものであるが、この図と第 8 図とから、次の様な事柄がわかる。

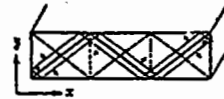
(a) 厚味振動と高次陰極振動とは、弾性的に結合して居る。これが為、第 8 図に示す様に厚味の主振動或は副振動を視野に動振する周波数に於いても、高次陰極振動が重畳して現われて居る。又第 13 図に破線で示す様な、 x_0 の変化に伴う厚味副振動の共振周波数の変化を示す破線と、高次陰極振動の夫を示す破線とが交叉する部分では、実際の共振周波数は実線で示す曲線に乗つて居る。

(b) 高次陰極振動は主振動より低い周波数領域では圧電的に共振し得て居るが、高い領域では共振しにくい事を示して居る。これは振動子の寸法と共振周波数との関係が、例えば第 13 図の P 点に該当する様な場合、高次陰極振動に対しては、前節で述べた様に、板面積の $1/45$ を介して共振されるに過ぎない上に、この振動と厚味の副振動 (3, 1, 0) が結合して居る為、従者に振動の勢力が相当量吸収され、結局殆んど共振が認められない位弱いものとなつて居る。

(c) 厚味副振動は p の次数の高いもの程、高次陰極振動との結合が密になつて居る。これは前節迄に論

*第 5 節で述べた厚味振動中主振動 (1, 1, 0) 以外のものを便宜上副振動と呼ぶ事にした。

じた厚味副振動にしても、高次陰極振動にしても、視力を変えると、互に振動の姿容こそ異なるが、凡そ第 14 図の如き、弾性体内に於ける平面波に基づく定在波であると云える。従つて厚味副振動の次数が高くなると、その波面は高次陰極振動の場合の波面と次第に平行に近くなる。これが為、両者の結合は密となり、結合がなければ第 15 図の破線の如き図形となるべきものが、実線の線になる。その上細かい実線の部分は、前述した様に厚味副振動の強弱である。結局結果は第 9 図の真例と極めて類似のものとなる訳である。



第 14 図

第 15 図は勿論定量的に示した図で、これを更に定量的に論ずるには相当複雑な計算を要するが、具体的に計算する程の図値が明確になつたら、他日を期して取り上げる事としたい。

第 15 図

10. 総 括

以上を要約すると次の様になる。

(a) 両板状水晶振動子はその輪郭が無限に広げれば、両者振動は三種類あるだけで (その振動は何れも厚味に逆比例する) 且その中の幾つかは圧電的に共振し得る (板面に対向した一対の電極板を介して) に過ぎないが、振動子の輪郭は有限である為、種々な姿容の振動が可能になる。

(b) 筆者の一人 (招季) が案出し、探針法と名付けた新な方法、即ち振動子に対向して居る電極を貫いて設けた探針により、厚味方向の電気場極を検出する方法により、振動子の全板面に亘る電気場極の詳細な分布を観察する事が出来、これが振動子の振動を解明する有力な手段となつた。

(c) 筆者等は適当に板面の一端が水晶の電気軸に平行な矩形板状 R_1 板の振動につき検討したが、その結果次の如き事柄が明らかになつた。

(d) 所謂厚味振動なる名称の下に実用に供せられて居る振動 (本稿では主振動と名付けた) は、板の輪郭寸法中電気軸に垂直な辺の長さ (x_0) には無関係で、電気軸方向の寸法 (y_0) を短くするに従い、周波数は低くならず高くなる。その振動姿容は第 8 図に示す。

(e) 振動変態に、即ち厚味副振動と高次陰極振動との二つの名称を与えた。前者は主振動より高い周

波数の振動で、主振動と同様電気軸方向の寸法 (x_0) が短くなるに従い、振動数が低くならず高くなる所のより振動で、振動変位に伴ない外形の度化しない振動である。

移者は板面寸法的一方を減少すると、振動数が略これに逆比例して増加する振動で、振動数は板面の他の辺には殆んど無関係である。

尤も高次陰極振動の中一種類だけは、その振動数が板面の一端 (x_0) の外に厚味 (y_0) にも関係する。

(f) 振動変態の異なる 2 種類の振動が互に結合して居る。

(g) 本稿には比較的共振の著しい振動のみ取り上げたが、この外にも種々な姿容の振動がある事は言うまでもない。

附 註 本研究は文部省科学研究費交付金の補助により行つたものである。この研究に關しては東京大学応用物理教室大井兼雄教授及び野津久一郎助教授に種々有益な助言を賜つた事を深く感謝する。又実験に當つて工大の池田静男君の不断の努力に負う所も少なくない。併せて謝意を表す。

引用文献

- (1) R. A. Sykes: Chapter IV, Quartz Crystals for Electrical Circuits edited by R. A. Holsing (D. van Nostrand, New York, 1946).
- (2) R. D. Mindlin: Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Crystal Plates-J.A.P. 22, 1, (March 1951) p. 316; Forced Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Piezoelectric Crystal Plates-J.A.P. 23, 1, (Jan. 1952) p. 83.
- (3) 古賀逸策, 招季八八: 水晶周波計, 本会誌 33, 8, (昭 25-3) p. 393.
- (4) F. E. Terman: Radio Engineering, 3rd Ed. 1947, McGraw Hill Book Co. p. 424, Figs. 8-10.
- (5) 古賀逸策: 両板状圧電性振動子の厚味振動の振動数と振動変態, 電学誌, 52, 527, (昭 7-8) p. 498; Phil. Mag. 16, 104, (Aug. 1933) p. 275.

附録 I 座標軸の取換に伴う弾性定数の取換
水晶の電気軸を x 軸, 主軸を y 軸にとつた場合の弾性定数は (単位 10^{10} dynes/cm²)

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= 83.45 & c_{12} &= 7.25 & c_{33} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \\ c_{22} &= 105.21 & c_{23} &= 14.33 & &= 39.10 \\ c_{44} &= 57.12 & c_{45} &= -16.82 & & \end{aligned} \right\}$$

であるが、第 1 図に示す様な関係に在る新な座標軸 x_1, y_1 に関し、 R_1 板に於いては $\theta = 34.4^\circ$ (この角度は偶然にも誤差 $1'$ 以内に於いて $\cos^{-1} 1/\sqrt{5}$ に等しい事を利用して、計算の手数を非常に省く事が出来た) で

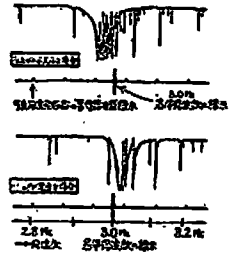
ある等を考慮して計算すると(単位 10^{10} dynes/cm²)

- $c_{11} = 85.45$ $c_{12} = -0.24$ $c_{13} = 27.84$
- $c_{14} = -2.26$ $c_{22} = 128.01$ $c_{23} = -5.68$
- $c_{31} = 6.21$ $c_{32} = 163.01$ $c_{33} = 8.90$
- $c_{41} = 37.14$ $c_{42} = 63.97$ $c_{43} = 2.89$
- $c_{44} = 29.25$

尙本稿では水晶の密度は常に 20°C の値 2.649g/cm^3 を採った。

附録 II 振動子の仕上げ

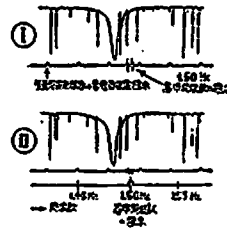
従来市販されて居る程度の振動子では、その仕上げが不十分の事が少なく、その板面の平面度及び平行度、輪郭の形を充分入念に仕上げると、共振の複雑性



第16図 試料(R₂板)仕上寸法(mm):
0.84₁ × 21.64₀ (電気軸方向) × 25.12₁

が著しく少くなる。第18図は(第4節に述べた方法で求めた)その例で、始末上図に示す程度の複雑な共振特性を持つて居た振動子を仕上げた結果、下図の程度になった。筆者等が対象として居るのは、この第16図下図の場合の際に入念に仕上げた振動子に於いて見られる種類のものである。

漸次に入念に仕上げたものについては、全く別の原石から取出した場合でも、全く同じ方位、同じ寸法にさえ仕上げると、全く同じ特性を示す。第17図はこの点を確かめる為に全然独立の二つの試料について調べた結果を対照して示す。



第17図 試料(I'板)仕上寸法(mm):
1.33₁ × 14.39₀ (電気軸方向)
× 14.50₁ (主軸方向)

(昭和27年9月1日受付)